Analyse harmonique sur les graphes et les groupes de Lie : fonctionnelles quadratiques, transformées de Riesz et espaces de Besov

Joseph Feneuil

UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

Spécialité : **Mathématiques**

Arrêté ministériel : 7 août 2006

Présentée par

Joseph Feneuil

Thèse dirigée par **Emmanuel Russ**

préparée au sein du laboratoire **Institut Fourier**
et de l'École Doctorale **MSTII**

Analyse harmonique sur les graphes et les groupes de Lie : fonctionnelles quadratiques, transformées de Riesz et espaces de Besov

Thèse soutenue publiquement le **10 juillet 2015**,
devant le jury composé de :

Pascal Auscher
Professeur, Université Paris-Sud, Rapporteur
Thierry Coulhon
Professeur, Université Paris Sciences et Lettres, Président
Sandrine Grellier
Professeur, Université d'Orléans, Examinatrice
Steve Hofmann
Professeur, University of Missouri, Rapporteur
Petru Mironescu
Professeur, Université Claude Bernard Lyon 1, Examinateur
El Maati Ouhabaz
Professeur, Université de Bordeaux, Examinateur
Emmanuel Russ
Professeur, Université de Grenoble, Directeur de thèse

Résumé

Ce mémoire est consacré à des résultats d'analyse harmonique réelle dans des cadres géométriques discrets (graphes) ou continus (groupes de Lie).

Soit Γ un graphe (ensemble de sommets et d'arêtes) muni d'un laplacien discret $\Delta = I - P$, où P est un opérateur de Markov. Sous des hypothèses géométriques convenables sur Γ, nous montrons la continuité L^p de fonctionnelles de Littlewood-Paley fractionnaires. Nous introduisons des espaces de Hardy H^1 de fonctions et de 1-formes différentielles sur Γ, dont nous donnons plusieurs caractérisations, en supposant seulement la propriété de doublement pour le volume des boules de Γ. Nous en déduisons la continuité de la transformée de Riesz sur H^1. En supposant de plus des estimations supérieures ponctuelles (gaussiennes ou sous-gaussiennes) sur les itérées du noyau de l'opérateur P, nous obtenons aussi la continuité de la transformée de Riesz sur L^p pour $1 < p < 2$.

Nous considérons également l'espace de Besov $B_\alpha^{p,q}(G)$ sur un groupe de Lie unimodulaire G muni d'un sous-laplacien Δ. En utilisant des estimations du noyau de la chaleur associé à Δ, nous donnons plusieurs caractérisations des espaces de Besov, et montrons une propriété d'algèbre pour $B_\alpha^{p,q}(G) \cap L^\infty(G)$, pour $\alpha > 0$, $1 \leq p \leq +\infty$ et $1 \leq q \leq +\infty$. Les résultats sont valables en croissance polynomiale ou exponentielle du volume des boules.

Abstract

This thesis is devoted to results in real harmonic analysis in discrete (graphs) or continuous (Lie groups) geometric contexts.

Let Γ be a graph (a set of vertices and edges) equipped with a discrete laplacian $\Delta = I - P$, where P is a Markov operator. Under suitable geometric assumptions on Γ, we show the L^p boundedness of fractional Littlewood-Paley functionals. We introduce H^1 Hardy spaces of functions and of 1-differential forms on Γ, giving several characterizations of these spaces, only assuming the doubling property for the volumes of balls in Γ. As a consequence, we derive the H^1 boundedness of the Riesz transform. Assuming furthermore pointwise upper bounds for the kernel (Gaussian of subgaussian upper bounds) on the iterates of the kernel of P, we also establish the L^p boundedness of the Riesz transform for $1 < p < 2$.

We also consider the Besov space $B_\alpha^{p,q}(G)$ on a unimodular Lie group G equipped with a sublaplacian Δ. Using estimates of the heat kernel associated with Δ, we give several characterizations of Besov spaces, and show an algebra property for $B_\alpha^{p,q}(G) \cap L^\infty(G)$ for $\alpha > 0$, $1 \leq p \leq +\infty$ and $1 \leq q \leq +\infty$. These results hold for polynomial as well as for exponential volume growth of balls.

Structure de la thèse

Le mémoire est divisé en 10 chapitres.
Dans le premier chapitre, nous rappelons des résultats classiques concernant les différentes notions rencontrées dans ce mémoire (transformées de Riesz, fonctionnelles de Littlewood-Paley, espaces de Hardy et espaces de Besov), puis nous énonçons brièvement les principaux résultats obtenus.
Les trois chapitres suivants sont consacrés à la présentation détaillée des résultats : fonctionnelles de Littlewood-Paley fractionnaires sur les graphes (Chapitre 2), espaces de Hardy et transformées de Riesz sur les graphes (Chapitre 3), espaces de Besov sur les groupes de Lie unimodulaires (Chapitre 4).
Le cinquième chapitre propose quelques questions ouvertes et perspectives de travail à partir des résultats de cette thèse.
Enfin, les cinq derniers chapitres rassemblent les articles consacrés au contenu des chapitres 2 à 4.

Structure of the thesis

The memoir is divided in ten chapters.
In Chapter 1, we recall classical results about the notions dealt with in this thesis (Riesz transforms, Littlewood-Paley functionals, Hardy and Besov spaces), and we give a short account of our main results.
The next three chapters are devoted to the detailed presentation of our results : fractional Littlewood-Paley functionals on graphs (Chapter 2), Hardy spaces and Riesz transforms on graphs (Chapter 3), Besov spaces on unimodular Lie groups (Chapter 4).
In Chapter 5, some open problems and perspectives are proposed.
Finally, in the last five chapters, the complete papers devoted to the results of Chapters 2,3 and 4 can be found.

Remerciements

Tout d'abord, j'aimerais remercier mon directeur de thèse Emmanuel Russ pour m'avoir fait découvrir le monde de la recherche mathématique. Il fut mon principal interlocuteur pendant ces trois années pour toutes les questions liées à la thèse, qu'elles soient en rapport avec les mathématiques ou non, et a toujours pris la peine d'essayer de répondre à mes attentes. Je lui serai éternellement reconnaissant pour sa présence, sa patience et sa prévenance.

Je souhaite aussi exprimer toute ma gratitude à Pascal Auscher et Steve Hofmann pour m'avoir fait l'honneur de rapporter ce mémoire pour la procédure administrative. Je me dois de remercier également les autres membres du jury, que sont Thierry Coulhon, Sandrine Grellier, Petru Mironescu et El Maati Ouhabaz. Une mention plus particulière va à Petru Mironescu, qui fut l'un de mes professeurs de Master et qui me mit en contact avec Emmanuel Russ.

Je désire aussi remercier l'ensemble du personnel de l'Institut Fourier, en particulier les bibliothécaires, pour leur efficacité. Il fut agréable de profiter de leurs compétences pour faciliter mon travail au quotidien.

Enfin, mes derniers remerciements vont à ma famille et mes amis pour leur soutien et leur respect pour mes choix.

Table des matières

Notations

Nous donnons ici les notations utilisées pour les cinq premiers chapitres du mémoire. Le paragraphe où la notation est introduite est donné à la fin de la ligne.

Relations d'ordre et d'équivalence

$\lesssim$	$A(x) \lesssim B(x)$ s'il existe $C > 0$ indépendant de x tel que $A(x) \leq CB(x)$. Les paramètres dont la constante C est indépendante seront évidents de par le contexte ou rappelés.	
$\simeq$	$A(x) \simeq B(x)$ ssi $A(x) \lesssim B(x)$ et $B(x) \lesssim A(x)$.	
$\sim$	$x \sim y$ si x et y sont voisins dans le graphe	§2.1
$\subset$	Deux espaces vectoriels normés X, Y vérifient $X \subset Y$ ssi X s'injecte continûment dans Y.	
$=$	Deux espaces vectoriels normés X, Y vérifient $X \subset Y$ ssi $X \subset Y$ et $Y \subset X$.	

Ensembles

$\mathbb{N}^*$	L'ensemble des entiers naturels non nuls.	
$\mathbb{R}_+^*$	L'ensemble des réels strictement positifs.	
$\mathcal{I}_n$	Ensemble des mots de longueur inférieure à n dans $[\![1, k]\!]$	p. 59
$(G, \mathbb{X})$ ou G	Groupe de Lie unimodulaire	§1.3.2
(Γ, μ) ou Γ	Graphe (pondéré non-orienté)	§2.1
(Γ, μ, ρ) ou Γ	Graphe muni d'une quasidistance	§2.1 et 3.1
T_Γ	"Fibré tangent" au graphe Γ	§3.3

Sous-ensembles

$[\![a, b]\!]$	Ensemble des entiers compris entre a et b.	
$B_d(x, r)$,$B(x, r)$	Boule de centre x et de rayon r (pour la distance d)	§2.1, 1.3.2
$B_\rho(x, k)$,$B(x, k)$	Boule de centre x et de rayon k (pour la quasidistance ρ)	§3.1
$C_j(B)$	Anneau défini à partir de B	§2.1
$C_j(x, k)$	Anneau centré en x de rayons $2^j k$ et $2^{j+1} k$	§3.1
$\gamma(x)$	Cône de $\Gamma \times \mathbb{N}^*$ de sommet x	§3.2
$\mathcal{R}(F)$	Union des cônes de $\Gamma \times \mathbb{N}^*$ avec sommets dans F	§3.2
$\mathcal{T}(O)$	Tente associée à O	§3.2
T_x	Espace "tangent" à un point x d'un graphe	§3.3

Géométrie

$\lvert x \rvert$	Distance de x au neutre e du groupe de Lie	§1.3.2
d	Distance (plus court chemin) sur un graphe Γ	§2.1
d	Distance de Carnot-Carathéodory sur un groupe de Lie	§1.3.2

dx .... Mesure de Haar sur le groupe de Lie.
ρ .... Quasidistance sur un graphe Γ .... §3.1
m .... Mesure sur le graphe Γ .... §2.1
$V(B)$ .... Volume de la boule B .... §2.1 et 1.3.2
$V(r)$ .... Volume de n'importe quelle boule de rayon r sur un groupe de Lie .... §1.3.2
$V(x,r)$ .... Volume de $B(x,r)$ sur un graphe .... §2.1
$\mathbb{X}$ .... Famille de champs de vecteurs invariants à gauche sur un groupe de Lie unimodulaire G .... §1.3.2

Opérateurs de différentiation

d .... Différentiation extérieure sur un graphe Γ .... §3.3
∂_k .... Différentiation sur la droite du temps "discrète" $\mathbb{N}^*$ §2.8, p. 41
∂_t .... Différentiation sur la droite du temps $\mathbb{R}_+^*$.
Δ .... Laplacien discret sur un graphe Γ .... §2.1
Δ .... Sous-laplacien sur un groupe de Lie .... §1.3.2
∇ .... Longueur du gradient sur un graphe Γ .... §2.1
∇_y .... Opérateur renvoyant la différence entre une fonction f et la fonction f translatée de y .... §4.5
$\mathbb{X}$ .... Famille de champs de vecteurs invariants à gauche sur un groupe de Lie unimodulaire G .... §1.3.2
X_i .... Un élément de la famille $\mathbb{X}$ .... §1.3.2
X_I .... Une différentiation multiple $X_{i_1} \dots X_{i_n}$ .... §1.3.2

Opérateurs de convolution et noyaux

H_t .... Opérateur de la chaleur $e^{-t\Delta}$ sur un groupe de Lie G .. §1.3.2
h_t .... Noyau de H_t .... §4.1
P .... Opérateur de Markov sur un graphe Γ .... §2.1
p .... Noyau de P .... §2.1
P^k .... Chaîne de Markov sur un graphe Γ .... §2.1
p_k .... Noyau de P^k .... §2.1

Opérateurs linéaires et sous-linéaires

$d\Delta^{-\frac{1}{2}}$ .... Transformée de Riesz du graphe Γ dans T_Γ.
$\nabla\Delta^{-\frac{1}{2}}$ .... Transformée de Riesz sur le graphe Γ.
g_β .... Fonctionnelle de Littlewood-Paley horizontale (avec le semi groupe $e^{-t\Delta}$) .... §1.1.1
$\tilde{g}_\beta$ .... Fonctionnelle de Littlewood-Paley verticale (avec $e^{-t\Delta}$) §1.1.1
g_β^d .... Fonctionnelle de Littlewood-Paley horizontale "discrète" . §2.5
$\tilde{g}_\beta^d$ .... Fonctionnelle de Littlewood-Paley verticale "discrète" ... §2.5
L_β .... Fonctionnelle de Lusin "discrète" .... §3.8
$L_\alpha^{p,q}$ .... Semi-norme sur $B_\alpha^{p,q}$ .... §4.5
$\Lambda_\alpha^{p,q}$ .... Semi-norme sur $B_\alpha^{p,q}$ .... §4.2

Espaces de fonctions et de distributions

$B_\alpha^{p,q}(G)$ .... Espace de Besov sur un groupe de Lie G .... §4.2
$BMO_{BZ\kappa,M}(\Gamma)$ Espace BMO sur un graphe Γ .... §3.6

$E^1_{quad,\beta}(\Gamma)$	Espace dense dans $H^1_{quad,\beta}(\Gamma)$	§3.8
$E^1_{quad,\beta}(T_\Gamma)$	Espace dense dans $H^1_{quad,\beta}(T_\Gamma)$	§3.9
$E^2(T_\Gamma)$	Espace dense dans $H^2(T_\Gamma)$	§3.3
$\mathcal{E}_M$	Espace de distributions sur un graphe	§3.6
$\mathcal{F}_M$	Espace de distributions sur un graphe inclu dans $\mathcal{E}_M$	§3.6
$H^1(\Gamma)$	Espace de Hardy de fonctions donné par le Théorème 3.10.1	§3.10
$H^1(T_\Gamma)$	Espace de Hardy de 1-formes donné par le Théorème 3.10.1	§3.10
$H^1_{BZ\kappa,M,\epsilon}(\Gamma)$	Espace de Hardy de fonctions défini par décomposition moléculaire sur un graphe Γ	§3.7
$H^1_{mol,M}(\Gamma)$	Espace de Hardy de fonctions donné par le Théorème 3.7.7	§3.7
$H^1_{mol,M,\epsilon}(T_\Gamma)$	Espace de Hardy de 1-formes sur Γ défini par décomposition moléculaire	§3.9
$H^1_{quad,\beta}(\Gamma)$	Espace de Hardy de fonctions sur Γ défini à l'aide de fonctionnelles quadratiques	§3.8
$H^1_{quad,\beta}(T_\Gamma)$	Espace de Hardy de 1-formes sur Γ défini à l'aide de fonctionnelles quadratiques	§3.9
$H^2(T_\Gamma)$	Image de $L^2(T_\Gamma)$ par la projection $d\Delta^{-1}d^*$	§3.3
$L^p(G)$	Espace L^p sur un groupe de Lie G.	
$L^p(\Gamma)$	Espace L^p (ou ℓ^p) sur un graphe Γ	§2.1
$L^p(T_\Gamma)$	Espace L^pL^2 sur l'ensemble T_Γ	§3.3
$\mathcal{M}_0^{M,\epsilon}$	Espace de fonctions tests sur un graphe	§3.6
$\mathcal{S}(G)$	Espace de Schwartz sur un groupe de Lie G	§4.2
$\mathcal{S}'(G)$	Espace des distributions tempérées sur un groupe de Lie G	§4.2
$T^p(\Gamma)$	Espaces de Tentes sur Γ	§3.2

Normes

$\lvert . \rvert_{T_x}$	Norme pour une fonction définie sur T_x	§3.3
$\lVert . \rVert_p$	Norme de L^p.	
$\lVert . \rVert_{p\to q}$	Norme d'opérateur pour un opérateur défini de L^p dans L^q.	
$\lVert . \rVert_{X\to Y}$	Norme d'opérateur pour un opérateur défini de X dans Y.	

Hypothèses

(LB)	Hypothèse entraînant l'analyticité L^2 de l'opérateur P	§2.2
(LB$_2$)	Hypothèse plus forte que la précédente	§2.2
(DUE)	Estimations diagonales supérieures sur le noyau p_k	§2.3
(DV)	Doublement global des boules pour la distance d	§2.2
(DV$_\rho$)	Doublement des boules pour la quasidistance ρ	§3.1
(GG$_q$)	Estimation L^q uniforme sur $k \in \mathbb{N}$ pour $\sqrt{k}\nabla P^{k-1}$	§2.4
(GGT$_2$)	Estimation L^1 L^2 de Gaffney sur $\sqrt{k}\nabla P^{k-1}$	§2.3
(GT$_2$)	Estimation L^1 L^2 de Gaffney sur la chaîne de Markov P^k	§2.3
(LDV)	Doublement local (sur un graphe)	§2.2
(P$_q$)	Inégalité de Poincaré L^q sur les boules	§2.4
(R$_p$)	Continuité L^p de la transformée de Riesz	§5.2
(UE)	Estimations gaussiennes ponctuelles supérieures sur le noyau p_k	§2.3
(UE$_\rho$)	Estimations sous-gaussiennes ponctuelles supérieures sur le noyau p_k	§3.1

Chapitre 1

Introduction

1.1 Transformées de Riesz et fonctionnelles de Littlewood-Paley

1.1.1 Cas du laplacien de $\mathbb{R}^d$

Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Dans $\mathbb{R}^d$, les transformées de Riesz sont les opérateurs $\partial_j(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}$, $j \in [\![1, d]\!]$. Un moyen de les définir est d'utiliser la transformée de Fourier. Plus précisément, si on note $\mathcal{F}$ la transformée de Fourier, pour toute $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et tout $\xi \in \mathbb{R}^d$,

$$\mathcal{F}(\partial_j(-\Delta)^{-\frac{1}{2}} f)(\xi) = i\frac{\xi_j}{|\xi|}\mathcal{F}(f)(\xi).$$

Les transformées de Riesz sont des opérateurs à noyaux, c'est-à-dire que, pour toute $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$,

$$\partial_j(-\Delta)^{-\frac{1}{2}} f = k_j * f$$

où le noyau $k_j(x) = c_d\frac{x_j}{|x|^{d+1}}$ est une distribution tempérée définie par valeur principale.

Les transformées de Riesz rentrent dans la catégorie des opérateurs à noyaux dits “de Calderón-Zygmund”. Le noyau k d'un opérateur de Calderón-Zygmund vérifie $k \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $\mathcal{F}(k) \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $|\nabla k(x)| \leq \frac{C}{|x|^{d+1}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Ces opérateurs sont en particulier continus sur $L^p(\mathbb{R}^d)$ pour tout $p \in (1, +\infty)$ (cf [Ste70a, Chapter 2, Theorem 1]).

L'un des intérêts des transformées de Riesz est de montrer que les espaces de Sobolev $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ peuvent, pour $1 < p < +\infty$, se définir à l'aide du laplacien. La continuité L^p, $p \in (1, +\infty)$, des transformées de Riesz permet d'obtenir, à l'aide de l'égalité $\|(-\Delta)^{\frac{1}{2}} f\|_{L^2}^2 = \sum_{j=1}^d \|\partial_j f\|_{L^2}^2$, d'un argument de dualité et d'un argument de densité, l'équivalence

$$\|\nabla f\|_p := \sum_{i=1}^d \|\partial_i f\|_p \simeq \|(-\Delta)^{\frac{1}{2}} f\|_p$$

pour tout $p \in (1, +\infty)$. Un aspect remarquable de cette équivalence est que l'opérateur ∇ est local alors que $(-\Delta)^{\frac{1}{2}}$ ne l'est pas. Cela nous permet de définir de manière équivalente l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ comme l'espace $\{f \in L^p,\ (-\Delta)^{\frac{1}{2}} f \in L^p\}$ [1].

1. Cela suggère une définition des espaces de Sobolev fractionnaires, voir paragraphe 1.3.4.

Par la suite, on parlera de *la* transformée de Riesz, comme de l'opérateur $\nabla(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}$ où ∇ est l'opérateur gradient. La continuité L^p de cet opérateur est équivalente à celle de $d(-\Delta)^{-1/2}$, où d est l'opérateur de différentiation extérieure.

Les fonctionnelles de Littlewood-Paley sont une classe de fonctionnelles quadratiques. Dans le cas euclidien, leur prototype est la fonctionnelle g définie comme suit. Soient $p \in (1,+\infty)$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$. On définit, pour tout $t > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}^d$, $u(x,t)$ par $u(x,t) = h_t * f(x) = H_t f(x)$, avec H_t l'opérateur de la chaleur [2] et h_t son noyau, donné par

$$h_t(x) := \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right) \tag{1.1}$$

pour tout $t > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}^d$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$g(f)(x) := \left(\int_0^{+\infty} \left(\left|t\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right|^2 + \sum_{1\leq i\leq n} \left|\sqrt{t}\frac{\partial u}{\partial x_i}(x,t)\right|^2\right) \frac{dt}{t}\right)^{1/2}.$$

Un résultat classique sur cette fonctionnelle ([Ste70a, Chapter 4, Theorem 1] pour la fonctionnelle avec le noyau de Poisson, et [CDL03, Section 1.5] et les références données dans ce dernier papier pour celle avec la noyau de la chaleur) est que, pour tout $p \in (1,+\infty)$ et toute $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$,

$$\|g(f)\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \simeq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}. \tag{1.2}$$

Pour présenter les extensions de ce résultat à des contextes variés, on remarque d'abord que la fonctionnelle g peut se décomposer en la somme de deux fonctionnelles distinctes aux propriétés différentes. Une première partie, appelée fonctionnelle de Littlewood-Paley horizontale, est définie pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ $(1 < p < +\infty)$ et tout $x \in \mathbb{R}^d$ par

$$g_1 f(x) := \left(\int_0^{+\infty} |t\Delta H_t f(x)|^2 \frac{dt}{t}\right)^{1/2}$$

et ne s'exprime qu'à l'aide du laplacien.
La deuxième partie est la fonctionnelle verticale, définie pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ $(1 < p < +\infty)$ et tout $x \in \mathbb{R}^d$ par

$$\tilde{g}_0 f(x) := \left(\int_0^{+\infty} \left|\sqrt{t}\nabla H_t f(x)\right|^2 \frac{dt}{t}\right)^{1/2}.$$

À l'aide du calcul fonctionnel, on peut définir $(-\Delta)^\beta$ comme un opérateur non borné sur $L^p(\mathbb{R}^d)$ lorsque $p \in (1,+\infty)$ et $\beta \in \mathbb{R}$. Cela nous permet de définir une classe plus large de fonctionnelles en remplaçant le laplacien par une puissance du laplacien. On définit ainsi g_β et $\tilde{g}_\beta$ pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et tout $x \in \mathbb{R}^d$ par

$$g_\beta f(x) := \left(\int_0^{+\infty} \left|(-t\Delta)^\beta H_t f(x)\right|^2 \frac{dt}{t}\right)^{1/2}$$

2. Il y a en réalité deux versions de la fonctionnelle g. L'autre possibilité est de définir $u(x,t) = P_t f(x)$ avec P_t l'opérateur de Poisson (cf [Ste70a, Chapter 4]). En d'autres termes, u est l'extension harmonique de f à $\mathbb{R}^d \times (0,+\infty)$. Cette version ne sera pas considérée dans la suite de ce mémoire.

et

$$\tilde{g}_\beta f(x) := \left(\int_0^{+\infty} \left| \sqrt{t} \nabla (-t\Delta)^\beta H_t f(x) \right|^2 \frac{dt}{t} \right)^{1/2}.$$

Une conséquence immédiate de (1.2) est que les deux fonctionnelles g_1 et $\tilde{g}_0$ sont continues sur L^p, $p \in (1, +\infty)$. En fait, pour tout $p \in (1, +\infty)$, on peut montrer les équivalences

$$\|g_\beta f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \simeq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \tag{1.3}$$

dès lors que $\beta > 0$ et

$$\|\tilde{g}_\beta f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \simeq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \tag{1.4}$$

si[3] $\beta > -\frac{1}{2}$. Pour (1.3), voir [Med95, Theorem 1.1, Theorem 1.5]. L'équivalence (1.4), que nous n'avons pas réussi à localiser explicitement dans la littérature, peut se montrer à l'aide d'arguments analogues à ceux de [Fen15b].

1.1.2 Opérateurs elliptiques d'ordre 2 sous forme divergence dans $\mathbb{R}^d$

Une première extension est de remplacer $-\Delta$ par des opérateurs elliptiques d'ordre 2 sous forme divergence. On reste toujours dans le cadre euclidien $\mathbb{R}^d$. Soit A une matrice de taille $d \times d$ à coefficients dans $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ et vérifiant la condition d'ellipticité uniforme suivante : il existe $0 < \alpha < M$ tels que, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\alpha|\xi|^2 \leq \mathcal{R}e(A(x)\xi \cdot \xi) \text{ et } |A(x)\xi \cdot \bar{\zeta}| \leq M|\xi||\zeta| \qquad \forall \xi, \zeta \in \mathbb{C}^d.$$

On définit l'opérateur L comme l'unique opérateur maximal accrétif avec domaine maximal dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ tel que, pour tout $f \in \mathcal{D}(L)$ et toute $\varphi \in W^{1,2}(\mathbb{R}^d)$,

$$\langle Lf, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} A(x) \nabla f(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx.$$

On dira alors que $Lf = -\operatorname{div}(A\nabla f)$. Que deviennent les résultats du paragraphe précédent si on remplace le semigroupe de la chaleur $H_t f$ par $e^{-tL} f$? Pour formuler la réponse, on définit les intervalles de $[1, +\infty]$ suivants :

(a) I_1 est l'intervalle des p tels que $g_{\frac{1}{2}}$ est continue sur L^p,

(b) I_2 est l'intervalle des p tels que le semi-groupe $(e^{-tL})_{t>0}$ est uniformément borné sur L^p,

(c) J_1 est l'intervalle des p tels que $\tilde{g}_0$ est continue sur L^p,

(d) J_2 est l'intervalle des p tels que $(\sqrt{t}\nabla e^{-tL})_{t>0}$ est uniformément borné sur L^p,

(e) J_3 est l'intervalle des p tels que la transformée de Riesz $\nabla L^{-\frac{1}{2}}$ est continue sur L^p.

Précisons que J_3 est d'intérieur non vide car il existe $\epsilon > 0$ tel que $\|\nabla L^{-\frac{1}{2}} f\|_{L^p} \simeq \|f\|_{L^p}$ pour tout $p \in (2-\epsilon, 2+\epsilon)$ (cf [Aus07, p.xiii] ; le cas $p = 2$ est la conjecture de Kato prouvée dans le cas général par Auscher, Hofmann, Lacey, Mc Intosh et Tchamitchian dans [AHL$^+$02]). Dans cette situation, Auscher a montré le résultat suivant (cf [Aus07, Theorem 4.1, Theorem 4.6 et Theorem 6.1]) :

Théorème 1.1.1. *Les intérieurs de I_1 et I_2 sont égaux.*

Les intérieurs de J_1, J_2 et J_3 sont égaux et inclus dans celui de I_1.

3. La borne $-\frac{1}{2}$ pour le domaine de β pour lequel $\tilde{g}_\beta$ est continu sur L^p est dû à la présence du gradient. En effet, on remarque que $\|\tilde{g}_{\beta-\frac{1}{2}} f\|_{2\to 2} = \|g_\beta f\|_{2\to 2} < +\infty$ si et seulement si $\beta > 0$. De plus, $-\frac{1}{2}$ est la puissance du laplacien dans l'expression de la transformée de Riesz.

1.1.3 Fonctionnelles de Littlewood-Paley horizontales, cas des espaces mesurés généraux

Les résultats de continuité L^p de la fonctionnelle de Littlewood-Paley horizontale peuvent s'étendre à des contextes très généraux, plus précisément celui d'un espace mesuré (X, m).

On considère d'abord le cas des semigroupes de diffusion symétriques. Soit $(T_t)_{t>0}$ un semigroupe agissant sur $L^p(X)$ pour tout $1 \leq p \leq +\infty$, avec $\lim_{t\to 0} T_t f = f$ pour toute $f \in L^2(X)$. On suppose que :

1. $\|T_t f\|_p \leq \|f\|_p$ pour tout $1 \leq p \leq +\infty$ et toute $f \in L^p(X)$,
2. pour tout $t > 0$, T_t est auto-adjoint sur $L^2(X)$,
3. $T_t f \geq 0$ si $f \geq 0$,
4. $T_t 1 = 1$.

On définit pour tout $f \in L^p(X)$ et tout $x \in X$,

$$g_1 f(x) := \left(\int_0^{+\infty} \left| t \frac{\partial T_t}{\partial t} f(x) \right|^2 \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Alors ([Ste70b, Chapter 4, Theorem 10]) :

Proposition 1.1.2. *Soit $1 < p < +\infty$. Pour toute fonction $f \in L^p(X)$,*

$$\|g_1 f\|_{L^p} \lesssim \|f\|_{L^p}.$$

Un autre cadre dans lequel des inégalités semblables à celle de la proposition 1.1.2 peuvent être obtenues est celui des opérateurs non nécessairement auto-adjoints mais possédant un calcul fonctionnel H^∞. Pour $\theta \in [0, \pi)$, on définit $S_\theta = \{z \in \mathbb{C}^*, |\arg(z)| < \theta\}$.

Soit $\omega \in (0, \pi)$. Un opérateur T sur un espace de Banach X est dit de type ω (avec $\omega \in [0, \pi)$) si T est fermé, $\sigma(T) \subset \overline{S_\omega}$ (où $\sigma(T)$ désigne le spectre de T) et pour tout $\theta \in (\omega, \pi)$,

$$\|(T - zI)^{-1}\| \leq C_\theta |z|^{-1} \qquad \forall z \in \mathbb{C} \backslash \overline{S_\theta}.$$

Soit $\mu \in (0, \pi)$. On définit $H^\infty(S_\mu)$ comme l'espace des fonctions holomorphes et bornées sur S_μ. Nous avons le résultat suivant (cf [CDMY96, Section 6]) :

Théorème 1.1.3. *Soient $p \in (1, +\infty)$ et $0 \leq \omega < \pi$. Définissons $p' \in (1, +\infty)$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Soit L un opérateur injectif de type ω dans $L^p(\Omega)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) Pour un $\beta > 0$, les fonctionnelles g_β^L et $g_\beta^{L^*}$, définies pour tout $f \in L^2(X)$ et tout $x \in X$ par

$$g_\beta^D f(x) = \left(\int_0^{+\infty} \left| (tD)^\beta e^{-tD} f(x) \right|^2 \frac{dt}{t} \right)^{1/2} \qquad \text{avec } D = L \text{ ou } L^*,$$

sont continues sur respectivement $L^p(\Omega)$ et $L^{p'}(\Omega)$.

(b) Pour tout $\beta > 0$, g_β^L et $g_\beta^{L^*}$ sont continues sur respectivement $L^p(\Omega)$ et $L^{p'}(\Omega)$.

(c) L'opérateur L possède un calcul H^∞ borné, c'est-à-dire que pour tout $\mu \in (\omega, \pi)$, il existe $C_\mu > 0$ tel que, pour tout $b \in H^\infty(S_\mu)$, on ait

$$\begin{cases} b(L) \text{ est un opérateur continu sur } L^p(\Omega) \\ \|b(L)\|_{p\to p} \leq C_\mu \|b\|_\infty. \end{cases}$$

1.1.4 Cas des variétés riemanniennes

Les résultats décrits dans le paragraphe 1.1.3 ne concernent que les fonctionnelles de Littlewood-Paley horizontales. Si on considère maintenant une fonctionnelle verticale dans un contexte géométrique où la notion de gradient a un sens (variétés riemanniennes, espaces métriques munis d'une forme de Dirichlet et d'un carré du champ, graphes), la présence du gradient ne permet pas d'appliquer les méthodes utilisées pour les fonctionnelles de Littlewood-Paley horizontales pour montrer la continuité L^p des transformées de Riesz ou des fonctionnelles $\tilde{g}_\beta$.

Considérons M une variété riemannienne complète, d la distance géodésique et μ la mesure riemannienne. L'opérateur ∇ est le gradient riemannien et Δ l'opérateur de Laplace-Beltrami. Les résultats du paragraphe 1.1.3 (en particulier la proposition 1.1.2) sont applicables. Pour montrer la continuité L^p des fonctionnelles de Littlewood-Paley verticales, ou des transformées de Riesz, on formule certaines hypothèses géométriques sur M.

Pour tout $x \in M$ et tout $r > 0$, $B(x,r)$ est la boule ouverte (pour d) de centre x et de rayon r. On dit que M a la propriété de doublement si, et seulement si,

$$\mu(B(x,2r)) \lesssim \mu(B(x,r)) \tag{1.5}$$

pour tout $x \in M$ et tout $r > 0$.

On dit que M vérifie l'inégalité de Poincaré L^2 sur les boules si, et seulement si, pour toute boule $B = B(x,r)$ et toute fonction $f \in C^\infty(B)$,

$$\int_B |f(x) - f_B|^2 \, d\mu(x) \lesssim r^2 \int_B |\nabla f(x)|^2 \, d\mu(x), \tag{1.6}$$

avec $f_B = \frac{1}{\mu(B)} \int_B f(y) d\mu(y)$.

Soit h_t le noyau de $H_t := e^{-t\Delta}$, appelé noyau de la chaleur. On dit que h_t satisfait des estimations gaussiennes ponctuelles supérieures si, et seulement si, pour tout $t > 0$ et tous $x, y \in M$,

$$h_t(x,y) \lesssim \frac{1}{\mu(B(x,\sqrt{t}))} \exp\left(-c\frac{d^2(x,y)}{t}\right). \tag{1.7}$$

On utilisera aussi une hypothèse d'uniforme continuité du gradient du semi-groupe : si $1 \leq q \leq \infty$, il s'agit de l'estimation

$$\|\sqrt{t}\nabla e^{-t\Delta} f\|_{L^q} \lesssim \|f\|_{L^q} \tag{1.8}$$

pour tout $t > 0$ et toute $f \in L^q$.

Une dernière condition est la majoration suivante de $\nabla e^{-t\Delta} f$ pour tout $t > 0$ et toute fonction $f \in C^1(M)$:

$$\left|\nabla e^{-t\Delta} f\right|^2 \lesssim H_t\left(|\nabla f|^2\right). \tag{1.9}$$

On peut alors énoncer :

Proposition 1.1.4. *Soit M une variété riemannienne complète. Alors :*

1. *la fonctionnelle $\tilde{g}_0$ est continue sur $L^p(M)$ pour tout $p \in (1,2]$,*

2. *si* (1.5) *et* (1.7) *sont satisfaites, alors la transformée de Riesz* $\nabla\Delta^{-1/2}$ *et les fonctionnelles* $\tilde{g}_\beta$ *(et* g_β*) sont de type* $(1,1)$ *faible*[4], *et donc continues sur* L^p *pour tout* $p \in (1,2]$,
3. *si* (1.5) *et* (1.6) *sont vérifiées, et si* $q > 2$, *alors* $\nabla\Delta^{-1/2}$ *est continue sur* L^p *pour tout* $p \in (2,q)$ *si, et seulement si,* (1.8) *est satisfaite pour tout* $p \in (2,q)$,
4. *si* $q > 2$, *si* (1.5), (1.6) *et* (1.8) *sont satisfaites pour tout* $p \in (2,q)$, *alors* $\tilde{g}_\beta$ *est continue sur* L^p *pour tout* $p \in (2,q)$.

Pour 1, voir [CDL03, Theorem 1.2]. La partie de l'assertion 2 consacrée à $\nabla\Delta^{-1/2}$ se trouve dans [CD99, Theorem 1.1] et celle relative à $\tilde{g}_\beta$ peut se montrer à l'aide d'arguments analogues à ceux de [Fen15b, Theorem 1.13]. L'assertion 3 est montrée dans [ACDH04, Theorem 1.3]. Notons que l'hypothèse (1.6) peut être affaiblie : il suffit en fait de supposer une inégalité de Poincaré L^{p_0} ainsi que (1.8) pour $q = p_0$ avec un $p_0 > 2$, [BCF14, Theorem 1.1]. Enfin, l'assertion 4 peut se montrer à l'aide d'arguments analogues à ceux de [Fen15b, Theorem 1.13]. Notons que la continuité L^p de la version de $\tilde{g}_{1/2}$ faisant intervenir le noyau de Poisson (c'est-à-dire celui de $e^{-t\Delta^{1/2}}$) est montrée dans [CD03] pour toute variété riemannienne complète pour laquelle (1.9) est satisfaite.
La continuité L^p des transformées de Riesz pour $2 < p < p_0$ peut aussi se traduire en termes d'inégalités de Hölder inverses pour le gradient de fonctions harmoniques (c'est-à-dire solutions de $\Delta u = 0$). On a le résultat suivant ([AC05, Theorem 2.1]) :

Proposition 1.1.5. *On suppose* (1.5) *et* (1.6). *Il existe* $p_0 > 2$ *tel que, pour tout* $q \in (2, p_0)$, *les assertions suivantes sont équivalentes :*
1. $\nabla\Delta^{-1/2}$ *est continue sur* L^p *pour tout* $p \in (2,q)$,
2. *pour tout* $p \in (2,q)$, *toute boule* $B \subset M$ *et toute fonction* u *harmonique dans* $3B$, *on a l'inégalité de Hölder inverse suivante pour* ∇u *:*

$$\left(\frac{1}{\mu(B)}\int_B |\nabla u(x)|^p \, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} \lesssim \left(\frac{1}{\mu(B)}\int_B |\nabla u(x)|^2 \, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ce résultat a été amélioré très récemment dans [BF15, Theorem 1.1] : l'inégalité de Poincaré peut être remplacée par des inégalités de type Gaffney $L^2 - L^{p_0}$ pour $e^{-t\Delta}$ pour un $p_0 > 2$ (les estimations de type Gaffney seront présentées dans la section 1.2.2 plus loin).
Relevons que les hypothèses précédentes ((1.5), estimations (1.7), inégalité de Poincaré (1.6), estimation (1.8) pour un $q \in (2, +\infty]$) sont satisfaites dans différentes situations géométriques : $\mathbb{R}^d$, groupes de Lie unimodulaire à croissance polynomiale[5] (cf [VSCC92]), variétés riemanniennes à courbure de Ricci positive ou nulle (voir [ACDH04, Sections 1.3 et 1.4] et les références données dans ces sections).
Néanmoins, ces hypothèses ne sont pas vérifiées en toute généralité.
Les estimations (1.7) sont vérifiées pour les variétés à courbure de Ricci positive. Lorsque la courbure de Ricci est seulement minorée, les estimations (1.7) ne sont vérifiées que

4. On rappelle qu'un opérateur sous-linéaire T est de type $(1,1)$ faible si

$$\sup_{\lambda>0,\, f\in L^1} \frac{\lambda\mu(\{|Tf|(x) > \lambda\})}{\|f\|_{L^1}} < +\infty.$$

5. où le gradient et le sous-laplacien Δ sont définis à l'aide d'une famille de champs de vecteurs invariants à gauche vérifiant la condition de Hörmander. Voir paragraphe 1.3.2.

pour $t \in (0,1]$. Des exemples explicites de variétés riemanniennes qui ne vérifient pas les estimations gaussiennes lorsque $t > 1$ sont donnés par des fractals de type Sierpiǹski, pour lesquels on a des estimations sous-gaussiennes lorsque t est grand (cf [BB92, Gri01]). De plus, la variété riemannienne formée de deux copies de $\mathbb{R}^2$ reliées par un cylindre est un exemple de variété riemannienne vérifiant les estimations gaussiennes (1.7) mais où la transformée de Riesz n'est continue sur L^p pour aucun $p > 2$ (cf [CD99]) et (1.6) est fausse. Il existe aussi des variétés coniques pour lesquelles on a (1.5), (1.6) et pour lesquelles il existe $p_0 > 2$ tel que (1.8) ne soit satisfaite pour aucun $p > p_0$ ([CL04, Li99]).

1.1.5 Cas des graphes

Les fonctionnelles de Littlewood-Paley et les transformées de Riesz ont aussi été considérées sur des graphes. Précisons que dans notre contexte, un graphe Γ est un ensemble (infini) de sommets reliés entre eux par des arêtes. On le munit d'une marche aléatoire de pas 1 (l'opérateur de Markov associée à la marche aléatoire noté P, et p_l est le noyau de P^l) à partir de laquelle on définit un laplacien positif $\Delta := I - P$ et une longueur de gradient ∇ (voir le paragraphe 2.1 pour une présentation complète).

Comme dans le cas des variétés, Dungey a montré dans [Dun08] que la fonctionnelle verticale $\tilde{g}_0$ (utilisant le semi-groupe de la chaleur engendré par Δ) est bornée sur L^p, $1 < p < 2$, sous une hypothèse de doublement pour des boules de petit rayon. Cependant, les preuves du cas des variétés utilisant des estimations gaussiennes ponctuelles supérieures du semi-groupe ne peuvent pas être adaptées au cas des graphes, car ces estimations gaussiennes sur le semi-groupe ne sont pas vérifiées même pour les cas les plus simples comme $\mathbb{Z}^d$ et les groupes discrets (cf [Pan93], où Pang a établi des estimations optimales pour $\mathbb{Z}$). Par contre, sous des hypothèses convenables, des estimations gaussiennes sont obtenues sur le noyau de la chaîne de Markov P^l (cf [Del99], et [HSC93] pour le cas des groupes discrets de type fini à croissance polynomiale). Cette observation conduit à introduire des fonctionnelles de Littlewood-Paley “discrétisées en temps” définies pour $f \in L^2(\Gamma)$ et tout $x \in \Gamma$ par :

$$g_\beta^d f(x) := \left(\sum_{l=1}^{+\infty} \frac{1}{l} \left| (l\Delta)^\beta P^{l-1} f(x) \right|^2 \right)^{1/2} \tag{1.10}$$

si $\beta > 0$ et

$$\tilde{g}_\beta^d f(x) := \left(\sum_{l=1}^{+\infty} \frac{1}{l} \left| \sqrt{l} \nabla (l\Delta)^\beta P^{l-1} f(x) \right|^2 \right)^{1/2} \tag{1.11}$$

si $\beta > -\frac{1}{2}$. Comme leur version continue, les fonctionnelles de Littlewood-Paley horizontales discrètes sont continues sur L^p pour tout $p \in (1, +\infty)$ dès que P est un opérateur positif contractant (cf [LMX12]). Ce résultat de continuité s'applique en particulier au cas des graphes précédemment décrit ([Fen15b, Remark 1.16], voir aussi le chapitre 2 du présent mémoire).

Si on suppose des hypothèses correspondant à (1.5) et (1.7) dans ce contexte discret, on peut montrer que g_1^d est aussi de type $(1,1)$ faible ([BR09, Theorem 1.16]). Nous reviendrons sur la continuité de g_β^d et de $\tilde{g}_\beta^d$ dans $L^p(\Gamma)$ au chapitre 2. Ajoutons que les résultats sur la continuité L^p de la transformée de Riesz $\nabla\Delta^{-1/2}$ correspondant à ceux de [AC05, ACDH04] (et rappelés dans les propositions 1.1.4 et 1.1.5) ont été obtenus dans [BR09].

1.2 Espaces de Hardy

Nous avons pu constater dans la partie précédente que les espaces L^p pour $p \in (1, +\infty)$ se prêtent bien à l'étude des fonctionnelles de Littlewood-Paley et de la transformée de Riesz. Il est raisonnable de se poser la question suivante : que se passe-t-il dans le cas limite $p = 1$? Une réponse possible est de considérer les espaces $L^{1,\infty}$ et obtenir ainsi la continuité de la transformée de Riesz de L^1 dans $L^{1,\infty}$ (cf [CD99] dans le cas de variétés riemanniennes et [Rus00] pour le cas des graphes). L'autre possibilité est de restreindre l'espace de départ. On veut trouver un espace (que l'on va appeler H^1), le plus grand possible, tel que la transformée de Riesz soit continue de H^1 dans L^1.

1.2.1 L'espace $H^1(\mathbb{R}^d)$

Le terme "espace de Hardy" a été utilisé pour la première fois dans les années 1910. Les espaces de Hardy sont issus de l'analyse complexe à une variable et étaient les noms donnés, dans la première moitié du 20e siècle, à des sous-espaces des fonctions holomorphes sur $\mathbb{D}$ (le disque unité) ou $\mathbb{P}$ (le demi-plan supérieur complexe).

En définissant une notion de système de fonctions harmoniques conjuguées qui généralisent les équations de Cauchy-Riemann, Stein et Weiss ont défini dans les années 1960 les espaces $H^1(\mathbb{R}^{d+1}_+)$ [6] (cf [SW60]) généralisant l'espace $H^1(\mathbb{P})$ à des dimensions supérieures. Les fonctions de $H^1(\mathbb{R}^{d+1}_+)$ ont une limite non tangentielle en presque tout point de $\mathbb{R}^d$. L'espace de Hardy à variables réelles $H^1(\mathbb{R}^d)$ [7] est l'espace des fonctions défini à partir de $H^1(\mathbb{R}^{d+1}_+)$ par

$$f \in H^1(\mathbb{R}^d) \Leftrightarrow f \in L^1(\mathbb{R}^d) \text{ et } \exists F \in H^1(\mathbb{R}^{d+1}_+);\ f(x) = \lim_{t \to 0} F(x,t) \ p.p.\, x \in \mathbb{R}^d.$$

Fefferman et Stein ont donné dans [FS72] différentes caractérisations de ces espaces $H^1(\mathbb{R}^d)$, notamment en termes de fonction maximale et de fonctionnelles quadratiques, et ont développé des méthodes pour l'étude de ces espaces de Hardy à variable réelle. Dans le théorème qui suit, pour toute fonction $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, tout $t > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}^d$, on définit $\phi_t(x) := t^{-d}\phi\left(\frac{x}{t}\right)$.

Théorème 1.2.1. *Soit $d \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) $f \in H^1(\mathbb{R}^d)$,

(b) $\sup\limits_{t>0} |f * \phi_t| \in L^1(\mathbb{R}^d)$ *pour tout* $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

(c) $\sup\limits_{t>0} |f * \phi_t| \in L^1(\mathbb{R}^d)$ *pour une fonction* $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ *vérifiant* $\int_{\mathbb{R}^d} \phi(x)dx \neq 0$,

(d) $x \mapsto \sup\limits_{|x-y|<t} |f * \phi_t(y)| \in L^1(\mathbb{R}^d)$ *pour tout/un* $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ *vérifiant* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \phi(x)dx \neq 0$,

(e) $\left(\displaystyle\int_0^\infty |f * \phi_t|^2 \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{2}} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ *pour tout/un* $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ *vérifiant* $\int_{\mathbb{R}^d} \phi(x)dx \neq 0$,

6. La notation $\mathbb{R}^{d+1}_+$ est utilisée pour désigner le demi espace $\mathbb{R}^d \times (0, +\infty)$.

7. En réalité, on peut définir de façon similaire $H^p(\mathbb{R}^d)$ pour $p > 0$, mais on ne s'intéressera jamais dans notre mémoire au cas $p \neq 1$ Notons que $H^p(\mathbb{R}^d) = L^p(\mathbb{R}^d)$ si $1 < p < +\infty$.

(f) $x \mapsto \left(\int_{|x-y|<t} |f * \phi_t|^2 \frac{dy\,dt}{t^{d+1}}\right)^{\frac{1}{2}} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ *pour tout/un* $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ *vérifiant* $\int_{\mathbb{R}^d} \phi(x)dx \neq 0$,

(g) $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ *et* $\nabla(-\Delta)^{-\frac{1}{2}} f \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

Dans l'item (f) du théorème 1.2.1, on peut remplacer $f * \phi_t$ par $t(-\Delta)^{1/2} e^{-t(-\Delta)^{1/2}} f = t\partial_t P_t f$ (où P_t est le semigroupe de Poisson) ou bien par $t^2 \Delta e^{t^2\Delta} = t\partial_t H_{t^2}$. Notons que, dans (f), l'intégrale est calculée sur un cône de sommet x. Une telle intégrale sera qualifiée de non tangentielle par la suite.
La dernière caractérisation de l'espace $H^1(\mathbb{R}^d)$ dans le Théorème 1.2.1 montre que $H^1(\mathbb{R}^d)$ est exactement l'espace des fonctions de $L^1(\mathbb{R}^d)$ dont les transformées de Riesz sont dans $L^1(\mathbb{R}^d)$, et est donc *le* bon substitut à $L^1(\mathbb{R}^d)$ lorsque l'on travaille avec des transformées de Riesz. On peut ajouter que H^1 et les espaces L^p pour $p > 1$ s'interpolent par la méthode complexe : $[H^1, L^p]_\theta = L^q$ avec $\frac{1}{q} = (1-\theta) + \frac{\theta}{p}$, $1 < p < +\infty$ ([FS71, Section 5],[Ste93, Chapter 4, Section 6.17]).

Quelques années plus tard, une caractérisation importante des espaces de Hardy, appelée décomposition atomique, fut découverte (le cas $d = 1$ a été prouvé par Coifman dans [Coi74] et le cas $d \geq 2$ par Latter dans [Lat78]). L'espace $H^1(\mathbb{R}^d)$ est, via cette caractérisation, l'espace des fonctions $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ vérifiant $f = \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_i a_i$ où la série converge dans L^1, avec $(\lambda_i)_i \in \ell^1(\mathbb{N})$ où chacun des atomes a_i vérifie, pour une boule B_i,

(i) a_i est à support dans B_i,

(ii) $\int_{\mathbb{R}^d} a_i = 0$,

(iii) $\|a_i\|_\infty \leq \frac{1}{|B_i|}$.

De plus, la norme $\|f\|_{H^1_{at}} = \inf\{\sum |\lambda_i|,\ f = \sum \lambda_i a_i\}$ est équivalente à celle de $H^1(\mathbb{R}^d)$. Cette caractérisation a permis à Coifman et Weiss d'étendre la définition de H^1 à des espaces métriques mesurés (X, d, μ) de type homogène (c'est-à-dire que la mesure μ est de Radon et vérifie $\mu(B(x,r)) < +\infty$ pour tout $x \in X$ et tout $r > 0$ et $\mu(B(x,2r)) \lesssim \mu(B(x,r))$ pour tout $x \in X$ et tout $r > 0$, cf [CW77]).[8]
Le dual de $H^1(\mathbb{R}^d)$ est isomorphe à l'espace $BMO(\mathbb{R}^d)$ des fonctions d'oscillation moyenne bornée ([FS72, Theorem 2]). Rappelons que, si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, $f \in BMO(\mathbb{R}^d)$ si, et seulement si,

$$\sup_{B\subset\mathbb{R}^d} \frac{1}{|B|} \int_B |f(x) - f_B|\, dx < +\infty,$$

où la borne supérieure est prise sur toutes les boules $B \subset \mathbb{R}^d$ et f_B désigne la moyenne de f sur B.

L'espace $H^1(\mathbb{R}^d)$ est également relié aux espaces de tentes introduits par Coifman, Meyer et Stein dans [CMS85]. Compte tenu de l'importance de ce lien dans la suite de ce mémoire, nous présentons ici la situation euclidienne. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on définit le cône $\Gamma(x)$ par

$$\Gamma(x) := \left\{(y,t) \in \mathbb{R}^{d+1}_+;\ |y - x| < t\right\}.$$

8. De nombreux outils essentiels en analyse harmonique, comme les fonctions maximales de Hardy-Littlewood, les lemmes de recouvrement, la décomposition de Whitney, la décomposition de Calderón-Zygmund, s'étendent aux espaces de nature homogène

Si $B = B(x,r) \subset \mathbb{R}^d$ est une boule ouverte, on définit la tente au-dessus de B par

$$T(B) := \left\{(y,t) \in \mathbb{R}_+^{d+1};\ |y-x| \le r-t\right\}.$$

Pour toute fonction mesurable $F : \mathbb{R}_+^{d+1} \to \mathbb{R}$ et tout $x \in \mathbb{R}^d$, on pose

$$\mathcal{S}F(x) := \left(\iint_{\Gamma(x)} \frac{|F(y,t)|^2}{t^d}\frac{dydt}{t}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

On dit que F appartient à l'espace de tentes $T^{1,2}(\mathbb{R}_+^{d+1})$ si, et seulement si, $\mathcal{S}F \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et on pose alors $\|F\|_{T^{1,2}(\mathbb{R}_+^{d+1})} := \|\mathcal{S}F\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$.
Un aspect important de cet espace $T^{1,2}(\mathbb{R}_+^{d+1})$ est qu'il possède lui aussi une décomposition atomique. On appelle atome de $T^{1,2}(\mathbb{R}_+^{d+1})$ toute fonction $A : \mathbb{R}_+^{d+1} \to \mathbb{R}$ telle que :

1. il existe une boule $B \subset \mathbb{R}^d$ telle que A soit à support dans $T(B)$,
2. $\int_{\mathbb{R}_+^{d+1}} |A(y,t)|^2 \frac{dydt}{t} \le \frac{1}{|B|}$.

La décomposition atomique pour $T^{1,2}(\mathbb{R}_+^{d+1})$ s'énonce alors ainsi ([CMS85, Theorem 1]) :

Proposition 1.2.2. *Soit F une fonction mesurable sur $\mathbb{R}_+^{d+1}$. Alors $F \in T^{1,2}(\mathbb{R}_+^{d+1})$ si, et seulement si, il existe une suite $(\lambda_i)_{i\ge1} \in l^1$ et une suite d'atomes $(A_i)_{i\ge1}$ tels que $F = \sum_{i\ge1} \lambda_i A_i$ avec convergence dans L^1. On a alors $\|F\|_{T^{1,2}(\mathbb{R}_+^{d+1})} \simeq \inf \sum_{i\ge1} |\lambda_i|$, la borne inférieure étant prise sur toutes les décompositions possibles de F.*

Le lien entre $T^{1,2}(\mathbb{R}_+^{d+1})$ et $H^1(\mathbb{R}^d)$ peut être décrit comme suit. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. D'après la remarque suivant le théorème 1.2.1, $f \in H^1(\mathbb{R}^d)$ si, et seulement si, $t\partial_t P_t f \in T^{1,2}(\mathbb{R}_+^{d+1})$ (où $P_t f$ est l'extension harmonique de f à $\mathbb{R}_+^{d+1}$). On a aussi l'équivalence des normes $\|f\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \simeq \|t\partial_t P_t f\|_{T^{1,2}(\mathbb{R}_+^{d+1})}$.
De plus, si $f \in H^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$, on peut écrire la formule reproduisante suivante :

$$f = 4\int_0^{+\infty} t(-\Delta)^{1/2} e^{-t(-\Delta)^{1/2}} t(-\Delta)^{1/2} e^{-t(-\Delta)^{1/2}} f \frac{dt}{t}.$$

Comme $F := t(-\Delta)^{1/2} e^{-t(-\Delta)^{1/2}} f \in T^{1,2}(\mathbb{R}_+^{d+1})$, on peut décomposer $F = \sum_i \lambda_i A_i$ (proposition 1.2.2), et puis on obtient une décomposition atomique (ou plus précisément moléculaire) de f en utilisant l'opérateur

$$F \mapsto \int_{\mathbb{R}_+^{d+1}} t(-\Delta)^{1/2} e^{-t(-\Delta)^{1/2}} F(t,\cdot) \frac{dt}{t}$$

qui envoie, à une constante près, un atome de $T^{1,2}(\mathbb{R}_+^{d+1})$ vers une “molécule” de $H^1(\mathbb{R}^d)$ (voir [CMS83, Théorème 3]). Les molécules, dont on ne donne pas la définition exacte ici, sont des fonctions qui possèdent une décroissance L^2 suffisante sans être supposées à support compact, et appartiennent à H^1 avec une borne uniforme sur la norme H^1.

1.2.2 Espaces de Hardy et opérateurs

La condition d'annulation des atomes de $H^1(\mathbb{R}^d)$ ($\int a = 0$) s'avère adaptée à l'étude des opérateurs à noyau $k(x,y)$ [9] vérifiant la condition de Hörmander, c'est-à-dire pour

9. Un opérateur intégral T est de noyau $k(x,y)$ si $Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^d} k(x,y) f(y)dy$ dès que $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et $x \in \mathbb{R}^d$.

lesquels il existe des constantes $c, C > 0$ telles que

$$\int_{B(y,2|y-y'|)^c} |k(x,y) - k(x,y')| dx \leq C \qquad \forall y, y' \in \mathbb{R}^d. \tag{1.12}$$

En effet, les opérateurs T continus sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ et dont le noyau K vérifie (1.12) se prolongent en des opérateurs continus de H^1 dans L^1 ([Ste93, Theorem 3, Chapter 3]). Ce résultat s'applique à la transformée de Riesz dans $\mathbb{R}^d$, mais aussi ([Rus01]) à la transformée de Riesz dans une variété riemannienne vérifiant la propriété de doublement (1.5) et l'inégalité de Poincaré L^2 sur les boules (1.6) (dans ce dernier cas, l'espace de Hardy considéré est défini en termes d'atomes, au sens de Coifman Weiss, voir [CW77]).

Dans le cas d'une variété riemannienne vérifiant (1.5) et (1.6), la condition (1.12) s'obtient de la manière suivante : on écrit que

$$\nabla \Delta^{-1/2} = c \int_0^{+\infty} \sqrt{t} \nabla e^{-t\Delta} \frac{dt}{t},$$

et on utilise le fait que, sous les hypothèses sur M, le noyau de la chaleur h_t vérifie non seulement (1.7) mais aussi une propriété de régularité hölderienne : il existe $\eta > 0$ tel que

$$|h_t(x,y) - h_t(x,y')| \lesssim \left(\frac{d(y,y')}{\sqrt{t}} \right)^\eta, \tag{1.13}$$

pour tout $t > 0$ et tous $x, y, y' \in M$.

Toutefois, les espaces de Hardy caractérisés en termes d'atomes d'intégrale nulle, et en particulier l'espace $H^1(\mathbb{R}^d)$, se révèlent inadaptés à l'étude de la continuité de certains opérateurs de type transformée de Riesz. Nous allons illustrer ce phénomène par deux exemples.

Soit $L = -\mathrm{div}(A\nabla)$ un opérateur uniformément elliptique dans $\mathbb{R}^d$, à coefficients mesurables bornés et à valeurs complexes (cf Section 1.1). En général, la transformée de Riesz $\nabla L^{-1/2}$ n'est pas continue de $H^1(\mathbb{R}^d)$ dans $L^1(\mathbb{R}^d)$, car cela entraînerait, par interpolation avec la continuité L^2, que $\nabla L^{-1/2}$ serait continu sur $L^p(\mathbb{R}^d)$ pour tout $p \in (1,2)$, ce qui est faux en général ([Aus07, p. xiii]). Cela montre en particulier que le noyau de cette transformée de Riesz ne vérifie pas la condition (1.12). Notons que, dans cette situation, le noyau du semigroupe engendré par L ne vérifie pas en général de majoration gaussienne ponctuelle du type (1.7), ni de régularité hölderienne de type (1.13). Le fait de ne pas avoir assez de régularité sur le noyau du semigroupe engendré par L empêche d'utiliser une condition d'intégrale nulle pour des atomes.
Obtenir un résultat limite de continuité (pour $p = 1$) pour $\nabla L^{-1/2}$ suppose donc de construire un espace de Hardy *adapté à l'opérateur* L. Cet espace $H^1_L(\mathbb{R}^n)$, et plus généralement $H^p_L(\mathbb{R}^n)$ pour $0 < p < +\infty$, a été construit dans [HM09, HMM11]. Ces espaces forment une échelle d'interpolation complexe, peuvent être caractérisés en termes de fonctionnelles quadratiques et de décompositions moléculaires et redonnent les espaces H^p (pour $p \leq 1$) et L^p (pour $p > 1$) lorsque le semigroupe engendré par L possède des estimations gaussiennes en taille et régularité. De plus ([HMM11, Proposition 5.6]), $\nabla L^{-1/2}$ est continu de $H^1_L(\mathbb{R}^d)$ dans $L^1(\mathbb{R}^d)$. On précise ici que les molécules sont des fonctions $a \in L^2$ telles que $a = L^k b$ pour un entier $k \geq 1$, $b \in L^2$ et a et b ont une décroissance L^2 convenable. La condition d'intégrale nulle pour les atomes de $H^1(\mathbb{R}^d)$ est remplacée par la condition $a = L^k b$.

Un autre cadre géométrique qui nécessite l'introduction d'espaces de Hardy adaptés à des opérateurs est celui des variétés riemanniennes complètes M doublantes, qui sont des espaces de type homogènes. Par conséquent, on peut définir un espace de Hardy noté $H^1_{CW}(M)$ au sens de Coifman Weiss (à l'aide d'une décomposition atomique, voir le paragraphe précédent). On reprend les notations de la section 1.1.
Si on suppose toujours (1.7) et (1.5) mais plus l'inégalité de Poincaré (1.6), le noyau de $e^{-t\Delta}$ ne vérifie pas de régularité hölderienne (1.13) et $\nabla\Delta^{-1/2}$ n'est pas en général continu de $H^1_{CW}(M)$ dans $L^1(M)$ (en particulier lorsque M est la variété formée par deux copies de $\mathbb{R}^2$ reliées par un cylindre, [AMR08, Section 8.2.1]). Il est toutefois possible, sous les hypothèses (1.7) et (1.5), d'introduire un espace de Hardy $H^1(M)$ adapté à Δ (voir [DY05b, DY05a] pour une construction analogue dans $\mathbb{R}^d$).
On peut aussi définir un espace de Hardy $H^1(M)$, et même des espaces $H^p(M)$ pour $1 \leq p \leq +\infty$, associés à l'opérateur de Laplace-Beltrami, sous la seule hypothèse (1.5), et d'obtenir une théorie "satisfaisante" pour ces espaces ([AMR08]). Comme pour [HM09, HMM11], ces espaces forment une échelle d'interpolation complexe et sont caractérisés en termes de fonctionnelles quadratiques non tangentielles. L'espace H^1, qui est un sous-espace de L^1, et même de l'espace $H^1_{CW}(M)$, peut être caractérisé en termes de décompositions moléculaires et de fonctions maximales. De plus, sous les hypothèses (1.5) et (1.6), il coïncide avec $H^1_{CW}(M)$.

Nous rappelons brièvement ici ces diverses descriptions des espaces de Hardy de [AMR08], renvoyant à [AMR08] et [AMM] pour les énoncés exacts. Les espaces de Hardy dans [AMR08] sont définis grâce au lien avec les espaces de tentes, comme décrit dans le cas euclidien au paragraphe 1.2.1. Cela entraîne que $f \in H^1$ ssi $h_\beta f \in L^1$ où h est une fonctionnelle de Lusin, donnée par

$$h_\beta f(x) = \left(\int_0^\infty \int_{|x-y|<\sqrt{t}} |(t\Delta)^\beta e^{-t\Delta} f(y)|^2 \frac{dy\, dt}{t\mu(B(x,\sqrt{t}))} \right)^{\frac{1}{2}},$$

qui peut être vue comme une version non tangentielle de g_β [10].
Une des caractérisations de H^1 se formule à l'aide d'atomes [11]. Schématiquement, un atome a est une fonction pouvant s'écrire $a = Lb$, avec b supportée dans une boule B de rayon r, et vérifiant $r\|a\|_{L^2} + \|b\|_{L^2} \leq \frac{r}{V(B)^{\frac{1}{2}}}$. Une fonction $f \in L^1(M)$ est alors dans H^1 si, et seulement si, elle peut s'écrire $f = \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_i a_i$ avec $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N})$, $(a_i)_i \in \mathbb{N}$ une suite d'atomes et où la convergence à lieu dans $L^1(M)$. On notera que la condition d'annulation $\int a = 0$ des atomes de l'espace de Hardy $H^1(\mathbb{R}^d)$ est remplacée par le fait que $a = Lb$.
La caractérisation maximale de H^1 obtenue dans [AMR08] est comparable à celle donnée dans le théorème 1.2.1 pour $H^1(\mathbb{R}^d)$, mais la borne supérieure doit être remplacée par une moyenne L^2 appropriée pour compenser le manque de régularité pour le semigroupe $e^{-t\Delta}$ ([AMR08, Theorem 7.1]).

10. Dans $\mathbb{R}^d$, si $L = -\Delta$, on a $\|g_\beta f\|_{L^1} \simeq \|h_\beta f\|_{L^1}$ (cf [FS72, Corollary 3]).
11. En fait, c'est une décomposition moléculaire qui est obtenue dans [AMR08]. Il est toutefois possible d'obtenir une décomposition atomique, comme le montrent les résultats de [HLM+11]. Contrairement aux atomes, les molécules ne sont pas à support compact mais vérifient des conditions de décroissance L^2 adaptées. La définition donnée ici est déjà une version simplifiée de ce qu'est un atome. Voir le chapitre 3.

Une observation fondamentale dans [AMR08, HM09, HMM11] est que e^{-tL} et $e^{-t\Delta}$ vérifient des estimations "de Gaffney" L^2 (beaucoup plus faibles que les estimations ponctuelles), et que ces estimations sont suffisantes pour définir correctement les espaces de Hardy associés à L ou Δ et obtenir toutes les propriétés citées précédemment. Les estimations de Gaffney sont du type

$$\|e^{-tL}[\mathbb{1}_F f]\|_{L^2(E)} \lesssim \exp\left(-c\frac{d^2(E,F)}{t}\right)\|f\|_{L^2}, \tag{1.14}$$

pour tous sous-ensembles E, F [12]. Ces estimations L^2-L^2 signifient que, si $f \in L^2$ est à support dans F, la norme $L^2(E)$ de $e^{-tL}f$ décroît selon un facteur exponentiel. Elles sont plus faibles que les estimations ponctuelles du noyau de $e^{-tL}f$, qui sont des estimations L^1-L^∞. En particulier, les estimations (1.14) ne font pas intervenir le noyau de e^{-tL} et sont satisfaites dans des situations où on n'a pas de majoration gaussienne du type (1.7). Elles sont notamment satisfaites quand $L = -\mathrm{div}(A\nabla)$ dans $\mathbb{R}^d$ avec A uniformément elliptique à coefficients mesurables bornés, et quand L est l'opérateur de Laplace Beltrami sur une variété riemannienne complète vérifiant (1.5).
Une construction d'espaces de Hardy comparables peut être faite quand L est un opérateur autoadjoint sur $L^2(X)$, où X est un espace métrique doublant et sous l'hypothèse que e^{-tL} vérifie des estimations de Gaffney L^2 (cf [HLM+11]).

1.2.3 Espaces de Hardy et transformées de Riesz

Revenons à la transformée de Riesz. Nous voulions construire un espace de Hardy H^1 le plus grand possible tel que la transformée de Riesz soit continue de H^1 dans L^1. Comme indiqué dans le paragraphe 1.2.2, si M est une variété riemannienne complète vérifiant (1.5), $\nabla\Delta^{-1/2}$ est continu de H^1 dans L^1 (H^1 désigne l'espace de Hardy associé à Δ).

En réalité, dans le cas euclidien, on a le résultat plus fort suivant : $\partial_j(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}$ est continue de $H^1(\mathbb{R}^d)$ dans $H^1(\mathbb{R}^d)$ pour tout $j \in [\![1, d]\!]$. On peut traduire ce fait en disant que $\nabla(-\Delta)^{-1/2}$ est continue de $H^1(\mathbb{R}^d)$ dans $H^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$. Notons que, contrairement au cas des espaces L^p, on ne peut pas traduire l'appartenance de $\nabla(-\Delta)^{-1/2}f$ à un espace de Hardy en utilisant uniquement la fonction scalaire $|\nabla(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}f|$. En effet, les atomes (et donc toutes les fonctions dans H^1) vérifient des conditions d'annulation (intégrale nulle) qui ne sont pas vérifiées par des fonctions positives.
Si on remplace $-\Delta$ par $L = -\mathrm{div}(A\nabla)$ comme plus haut, la transformée de Riesz $\nabla L^{-1/2}$ est continue de $H^1_L(\mathbb{R}^d)$ dans $H^1(\mathbb{R}^d)$ ([HMM11, Theorem 5.2]).
L'extension de cet énoncé de continuité des transformées de Riesz de H^1 dans H^1 au cas des variétés riemanniennes suppose donc de définir un espace de Hardy "de gradients" ou de 1-formes différentielles.
Dans [AMR08], les auteurs ont en fait défini l'espace $H^1_\Delta(\Lambda T^*M)$, où

$$\Lambda T^*M = \bigoplus_{k\in[\![0,\dim M]\!]} \Lambda^k T^*M,$$

$\Lambda^k T^*M$ désigne l'espace des k-formes différentielles pour $k \in [\![0, \dim M]\!]$ et Δ est le laplacien de Hodge-de Rham. Comme expliqué dans le paragraphe 1.2.2, cette construction ne

12. Dans certaines situations, la décroissance peut n'être que polynomiale, mais cela suffit encore pourvu que la décroissance soit assez rapide.

repose que sur (1.5) et les estimations Gaffney L^2 pour le laplacien de Hodge de Rham. Cette construction peut se présenter sous la forme (simplifiée) suivante :

Théorème 1.2.3. *Soit M une variété riemannienne complète vérifiant* (1.5).
Il existe un espace $H^1_\Delta(\Lambda T^*M) \subset L^1(\Lambda T^*M)$ tel que
- *L'espace $H^1_\Delta(\Lambda T^*M)$ est caractérisé de manière équivalente en terme de fonctionnelle de Lusin ou en terme de décomposition en atomes.*
- *La transformée de Riesz $D\Delta^{-\frac{1}{2}}$ est continue de $H^1_\Delta(\Lambda T^*M)$ dans $H^1_\Delta(\Lambda T^*M)$ (et donc dans $L^1(\Lambda T^*M)$), où $D = d + d^*$ est l'opérateur de Dirac.*

La caractérisation de H^1 à l'aide d'une fonctionnelle quadratique (de Lusin) donne la continuité de la transformée de Riesz tandis que la décomposition en atomes donne l'inclusion dans L^1.

1.3 Espaces de Besov sur les groupes de Lie

1.3.1 Cas euclidien

On rappelle d'abord ici les définitions et quelques propriétés classiques des espaces de Besov dans $\mathbb{R}^d$.
Ces espaces sont définis à l'aide d'une décomposition de Littlewood-Paley. On utilisera la notation suivante : si $(f_j)_{j\geq 0}$ est une suite de fonctions mesurables sur $\mathbb{R}^d$ et $1 \leq p \leq +\infty$, $1 \leq q \leq +\infty$, on note

$$\|(f_j)\|_{l^q(L^p)} := \left(\sum_{j\geq 0} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f_j(x)|^p \, dx \right)^{q/p} \right)^{1/q},$$

avec la modification immédiate si $p = \infty$ ou $q = \infty$.
On se donne une suite de fonctions $(\varphi_j)_{j\geq 0} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ telle que :
1. supp $\varphi_0 \subset B(0,2)$ et supp $\varphi_j \subset B(0, 2^{j+1}) \setminus B(0, 2^{j-1})$ pour tout $j \geq 1$,
2. pour tout $\beta \in \mathbb{N}^d$, il existe $c_\beta > 0$ tel que $\left| D^\beta \varphi_j(x) \right| \leq c_\beta 2^{-j|\beta|}$, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et tout $j \geq 0$,
3. pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $\sum_{j\geq 0} \varphi_j(x) = 1$.

On définit alors les espaces de Besov inhomogènes de la façon suivante :

Définition 1.3.1. *Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$ et $1 \leq q \leq \infty$. On définit $B^{p,q}_\alpha(\mathbb{R}^d)$ comme l'espace des $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ telles que*

$$\|f\|_{B^{p,q}_\alpha(\mathbb{R}^d)} := \left\| \left(2^{\alpha j} \mathcal{F}^{-1} \left(\varphi_j \mathcal{F} f(\cdot) \right) \right) \right\|_{l^q(L^p)} < \infty.$$

L'espace $B^{p,q}_\alpha(\mathbb{R}^d)$ ainsi défini ne dépend pas du choix de la suite $(\varphi_j)_{j\geq 0}$ ([Tri83, Section 2.3.2, Proposition 1, p. 46]). Si $f \in B^{p,q}_\alpha(\mathbb{R}^d)$, on appelle $f = \sum_{j\geq 0} f_j$ la décomposition de Littlewood-Paley de f. Notons que cette série converge dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.
Pour définir la version homogène des espaces de Besov, on se donne maintenant une suite de fonctions $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ telle que :
1. supp $\varphi_j \subset B(0, 2^{j+1}) \setminus B(0, 2^{j-1})$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$,
2. pour tout $\beta \in \mathbb{N}^d$, il existe $c_\beta > 0$ tel que $\left| D^\beta \varphi_j(x) \right| \leq c_\beta 2^{-j|\beta|}$, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et tout $j \in \mathbb{Z}$,

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, $\sum_{j\in\mathbb{Z}} \varphi_j(x) = 1$.

Les espaces de Besov homogènes sont des espaces de distributions modulo les polynômes. Plus précisément, soit $\mathcal{Z}(\mathbb{R}^d)$ le sous-espace de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ formé des fonctions $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ telles que $\partial^\beta \varphi(0) = 0$ pour tout $\beta \in \mathbb{N}^d$. Soit $\mathcal{Z}'(\mathbb{R}^d)$ l'espace dual de $\mathcal{Z}(\mathbb{R}^d)$. On vérifie facilement ([Tri83, Section 5.1.2]) que $\mathcal{Z}'(\mathbb{R}^d)$ s'identifie au quotient $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)/\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$, où $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ est l'espace des polynômes sur $\mathbb{R}^d$.

Définition 1.3.2. *Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $1 \le p \le \infty$ et $1 \le q \le \infty$. On définit alors $\dot{B}^{p,q}_\alpha(\mathbb{R}^d)$ comme l'espace des $f \in \mathcal{Z}'(\mathbb{R}^d)$ telles que*

$$|f|_{B^{p,q}_\alpha(\mathbb{R}^d)} := \left\| \left(2^{\alpha j} \mathcal{F}^{-1} \left(\varphi_j \mathcal{F} f(\cdot) \right) \right) \right\|_{l^q(L^p)} < \infty.$$

Cette définition est correcte. En effet, pour tout polynôme P et toute $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, $|f|_{B^{p,q}_\alpha(\mathbb{R}^d)} = |f + P|_{B^{p,q}_\alpha(\mathbb{R}^d)}$.

Comme dans le cas inhomogène, $\dot{B}^{p,q}_\alpha(\mathbb{R}^d)$ est un espace de Banach et ne dépend pas du choix de la suite $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ [Tri83, Section 5.1.5, Theorem, p. 240].

Pour tout $\alpha > 0$ et tous $1 \le p \le \infty$, $1 \le q \le \infty$, on a ([Tri92, Section 2.3.3, Theorem])

$$B^{p,q}_\alpha(\mathbb{R}^d) = L^p(\mathbb{R}^d) \cap \dot{B}^{p,q}_\alpha(\mathbb{R}^d) \text{ et } \|f\|_{B^{p,q}_\alpha(\mathbb{R}^d)} \simeq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + |f|_{B^{p,q}_\alpha(\mathbb{R}^d)}. \tag{1.15}$$

L'espace $B^{p,q}_\alpha(\mathbb{R}^d)$ possède plusieurs caractérisations. L'une d'entre elles fait intervenir des différences d'ordre fini. Pour toute fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, tout entier $M \ge 0$ et tous $x, h \in \mathbb{R}^d$, on définit

$$\nabla_h^M f(x) = \sum_{l=0}^{M} \binom{M}{l} (-1)^{M-l} f(x + lh).$$

On a alors la caractérisation suivante des espaces de Besov ([Tri83, Section 2.5.12] et [RS96, Theorem, p.41] pour le cas inhomogène et [Tri83, Section 5.2.3, Theorem 2] pour le cas homogène) :

Proposition 1.3.3. *Soient $\alpha > 0$, $1 \le p \le \infty$ et $1 \le q \le \infty$. Soit $M > \alpha$ un entier. Alors (avec la modification convenable si $q = +\infty$), pour toute fonction mesurable f sur $\mathbb{R}^d$:*

1. *on a l'équivalence de semi-normes suivante :*

$$|f|_{B^{p,q}_\alpha(\mathbb{R}^d)} \simeq \left(\int_{\mathbb{R}^d} |h|^{-\alpha q} \left\| \nabla_h^M f \right\|^q_{L^p(\mathbb{R}^d)} \frac{dh}{|h|^d} \right)^{1/q}. \tag{1.16}$$

2. *Pour tout $\delta > 0$,*

$$\|f\|_{B^{p,q}_\alpha(\mathbb{R}^d)} \simeq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + \left(\int_{|h|\le\delta} |h|^{-\alpha q} \left\| \nabla_h^M f \right\|^q_{L^p(\mathbb{R}^d)} \frac{dh}{|h|^d} \right)^{1/q}.$$

On peut également caractériser $B^{p,q}_\alpha$ en utilisant le noyau de la chaleur ([Tri82], [Tri83, Section 2.12.2, Theorem, p. 184]).

Proposition 1.3.4. *Soient $\alpha > 0$, $1 \le p \le \infty$, $1 \le q \le \infty$. Pour tout entier $M > \frac{\alpha}{2}$, on a, pour toute $f \in L^p$,*

$$\|f\|_{B^{p,q}_\alpha(\mathbb{R}^d)} \simeq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + \left(\int_0^\infty t^{\left(M - \frac{\alpha}{2}\right) q} \left\| \frac{\partial^M H_t f}{\partial t^M}(\cdot) \right\|^q_{L^p(\mathbb{R}^d)} \frac{dt}{t} \right)^{1/q},$$

où $H_t = e^{t\Delta}$ est le semigroupe engendré par $-\Delta$ dans $\mathbb{R}^d$.

Cette proposition relie la norme Besov de f à la norme d'une extension à $\mathbb{R}^d \times (0, +\infty)$ dans un espace de Sobolev à poids. Notons qu'on peut aussi donner une caractérisation du même type utilisant l'extension harmonique de f ou d'autres extensions de f obtenues par convolution (ces idées remontent à [Usp61], voir [MRre] pour une approche plus complète).
On termine cette présentation par une propriété d'algèbre pour les espaces de Besov ([Dan12, Proposition 1.4.3], [Run86, Theorem 2, p. 336], [MRre, Proposition 6.2]).

Proposition 1.3.5. *Soient $\alpha > 0$, $1 \leq p < +\infty$ et $1 \leq q \leq +\infty$. Alors $B_\alpha^{p,q}(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$ est une algèbre pour le produit ponctuel. Plus précisément, il existe $C > 0$ telle que, pour tous $f, g \in B_\alpha^{p,q}(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$, on a*

$$\|fg\|_{B_\alpha^{p,q}} \leq C \left(\|f\|_{B_\alpha^{p,q}} \|g\|_{L^\infty} + \|f\|_{L^\infty} \|g\|_{B_\alpha^{p,q}} \right). \tag{1.17}$$

L'approche de [Dan12] consiste à utiliser des paraproduits (introduits à l'origine par Bony dans [Bon81]) pour évaluer le produit fg si $f, g \in B_\alpha^{p,q}(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$. L'idée est la suivante. On écrit les décompositions de Littlewood-Paley de f et de g :

$$f = \sum_{j \geq 0} f_j \text{ et } g = \sum_{j \geq 0} g_j.$$

On pose alors

$$T_f g := \sum_{j,k;\ j \leq k-2} f_j g_k$$

et

$$R(f, g) := \sum_k f_k \tilde{g}_k$$

avec

$$\tilde{g}_k := g_{k-1} + g_k + g_{k+1}.$$

Ainsi,

$$fg = T_f g + T_g f + R(f, g),$$

et on estime séparément chaque terme, obtenant à chaque fois une estimation dans $B_\alpha^{p,q}(\mathbb{R}^d)$. Nous reviendrons sur cette approche par des paraproduits à propos de l'extension de ce résultat aux groupes de Lie.
La preuve de la propriété d'algèbre dans [MRre] repose sur des propriétés d'extension analogues à la proposition 1.3.4. Comme expliqué après l'énoncé de la proposition 1.3.4, on étend f et g à $\mathbb{R}^d \times (0, +\infty)$ en des fonctions appartenant à des espaces de Sobolev à poids et on est ramené à des propriétés d'algèbre pour des espaces de Sobolev portant sur un nombre entier de dérivées.
La propriété d'algèbre pour les espaces de Besov a des conséquences importantes. Elle permet notamment, par des arguments de point fixe, de donner des résultats d'existence pour une classe d'équations d'ondes semilinéaires avec des nonlinéarités quadratiques ([BCD11, Theorem 8.47]), ou de Schrödinger non linéaire ([BCD11, Corollary 10.4]).

1.3.2 Groupes de Lie unimodulaires

Nous allons faire ici un rappel des notions sur les groupes de Lie qui nous seront utiles dans ce mémoire.

Soit G un groupe de Lie réel connexe unimodulaire. Le terme "unimodulaire" signifie que la mesure de Haar dx est invariante à la fois à gauche et à droite. On appelle $\mathcal{L}$ l'algèbre de Lie de G et on considère une famille $\mathbb{X} = \{X_1, \dots, X_k\}$ de champs de vecteurs sur G invariants à gauche et satisfaisant la condition de Hörmander (ce qui signifie que l'algèbre de Lie engendrée par la famille associée à $\mathbb{X}$ est $\mathcal{L}$). Si $I = (i_1, \dots, i_n)$, on utilisera la notation X_I pour $X_{i_1} \dots X_{i_n}$.

Le groupe G est muni d'une métrique standard d, appelée distance de Carnot-Caratheodory. Elle est définie comme il suit. Soit $l : [0,1] \to G$ un chemin absolument continu. On dit que l est admissible s'il existe des fonctions mesurables $a_1, \dots, a_k : [0,1] \to \mathbb{C}$ telles que

$$l'(t) = \sum_{i=1}^{k} a_i(t) X_i(l(t)) \qquad \text{pour presque tout } t \in [0,1].$$

Si l est admissible, sa longueur est définie par $|l| = \int_0^1 \left(\sum_{i=0}^{k} |a_i(t)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} dt$. Pour tous les éléments $x, y \in G$, la distance $d(x,y)$ entre x et y est la borne inférieure des longueurs des chemins admissibles reliant x à y (un tel chemin existe grâce à la condition de Hörmander). Précisons que l'invariance à gauche des X_i implique l'invariance à gauche de d. Nous utiliserons aussi $|x|$ pour désigner la distance de x à e (et donc $|y^{-1}x|$ pour la distance de x à y).

Pour $r > 0$ et $x \in G$, la notation $B(x,r)$ sera utilisée pour désigner la boule ouverte de centre x et de rayon r. On écrira aussi $V(r)$ pour le volume de n'importe quelle boule de rayon r.

À partir de maintenant, nous allons écrire G pour $(G, \mathbb{X}, d, dx)$. Rappelons les résultats suivants. D'abord G a une dimension locale (cf [NSW85]) :

Proposition 1.3.6. *Soit G un groupe de Lie unimodulaire et $\mathbb{X}$ une famille de champs de vecteurs invariants à gauche vérifiant la condition de Hörmander. Alors G a une dimension locale, c'est-à-dire qu'il existe une constante $C > 0$ un entier $d \in \mathbb{N}$ tels que*

$$V(r) \simeq r^d \qquad \forall r \in (0,1].$$

Par conséquent, G vérifie la propriété de doublement locale, c'est-à-dire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$V(2r) \leq C V(r) \qquad \forall r \in (0,1].$$

Lorsque les boules ont un rayon plus grand que 1, le comportement de $V(r)$ est décrit par un résultat de Guivarc'h (cf [Gui73]) :

Proposition 1.3.7. *Si G est un groupe de Lie unimodulaire, seules deux situations peuvent se produire :*

1. *Soit G est à croissance polynomiale, ce qui signifie qu'il existe $D \in \mathbb{N}^*$ tel que*

$$V(r) \simeq r^D \qquad \forall r \geq 1.$$

Dans ce cas, D, qui ne dépend pas de $\mathbb{X}$, est appelée dimension à l'infini de G.

2. *Soit G est à croissance exponentielle, ce qui signifie qu'il existe quatre constantes $c_1, c_2, C_1, C_2 > 0$ telles que*

$$c_1 e^{c_2 r} \leq V(r) \leq C_1 e^{C_2 r} \qquad \forall r \geq 1.$$

On considère le sous-laplacien positif Δ sur G défini par

$$\Delta = -\sum_{i=1}^{k} X_i^2.$$

On écrira $H_t := e^{-t\Delta}$ pour désigner le semi-groupe de la chaleur sur G.

1.3.3 Cas des groupes de Lie

Soit $(G, \mathbb{X})$ un groupe de Lie unimodulaire muni d'un système de champs de vecteurs $\mathbb{X}$ comme précédemment. On suppose G à croissance polynomiale. Une théorie des espaces de Besov sur G a été développée, et présente de nombreuses analogies avec le cas euclidien. On définit d'abord l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(G)$ ([FMV06, Skr02]). Si $f \in C^\infty(G)$, $f \in \mathcal{S}(G)$ si, et seulement si, pour tout $\beta \in \mathbb{N}$ et tout multi-indice I,

$$p_{\beta,I}(f) := \sup_{x \in G} (1 + |x|)^\beta |X_I f(x)| < +\infty$$

(cette définition est adaptée dans [Skr02] au cas de la croissance du volume au plus exponentielle, et une adaptation comparable sera utilisée pour la théorie des espaces de Besov dans des groupes de Lie unimodulaires généraux). Il s'agit d'un espace de Fréchet pour cette famille de seminormes. On définit ensuite $\mathcal{S}'(G)$ comme l'espace dual de $\mathcal{S}(G)$.

Une première façon de définir des espaces de Besov sur G est d'utiliser une décomposition de Littlewood-Paley. Suivant [FMV06], on fixe une fonction $\phi : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ de classe C^∞, à support dans $[0, 1]$ et telle que $\phi(t) = 1$ pour tout $t \in [0, \frac{1}{4}]$. On définit ensuite $\psi(t) := \phi\left(\frac{t}{4}\right) - \phi(t)$ pour tout $t \geq 0$. On vérifie immédiatement que, pour tout $t \geq 0$,

$$\phi(t) + \sum_{j \geq 0} \psi(2^{-2j} t) = 1.$$

On montre ensuite, en utilisant des théorèmes de multiplicateurs, que, pour tout $j \geq 0$, les noyaux de $\phi(2^{-2j}\Delta)$ et $\psi(2^{-2j}\Delta)$ sont dans $\mathcal{S}(G)$. Alors ([FMV06, Proposition 4.1]), la décomposition

$$f = \phi(\Delta) f + \sum_{j \geq 0} \psi(2^{-2j}\Delta) f := \phi(\Delta) f + \sum_{j \geq 0} f_j$$

est vérifiée si $f \in L^2(G)$ (resp. $f \in \mathcal{S}(G)$, $f \in \mathcal{S}'(G)$) avec convergence dans $L^2(G)$ (resp. dans $\mathcal{S}(G)$, $\mathcal{S}'(G)$).
Si $\alpha \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$ et $1 \leq q \leq \infty$, on définit $B_\alpha^{p,q}(G)$ comme l'espace des distributions $f \in \mathcal{S}'(G)$ telles que

$$\|f\|_{B_\alpha^{p,q}(G)} := \|\phi(\Delta) f\|_{L^p(G)} + \left(\sum_{j \geq 0} 2^{j\alpha q} \|f_j\|_{L^p(G)}^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

avec la modification usuelle si $q = \infty$.

Comme dans la proposition 1.3.4, les espaces $B_\alpha^{p,q}(G)$ peuvent être décrits au moyen du noyau du semigroupe engendré par Δ ([FMV06, Proposition 5.2]) :

Proposition 1.3.8. *Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$ et $1 \leq q \leq \infty$. Soit $M > \alpha$ un entier. Alors, pour toute $f \in \mathcal{S}'(G)$, les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $f \in B_\alpha^{p,q}(G)$,
2. *pour tout* $t > 0$, $e^{-t\Delta} f \in L^p(G)$ *et* $\int_0^1 \left(t^{-\frac{\alpha}{2}} \left\| (t\Delta)^{\frac{M}{2}} e^{-t\Delta} f \right\|_{L^p(G)} \right)^q \frac{dt}{t} < +\infty$.

Notons que, si $f \in \mathcal{S}'$ et $t > 0$, on définit $e^{-t\Delta} f \in \mathcal{S}'$ par

$$\langle e^{-t\Delta} f, \varphi \rangle := \langle f, e^{-t\Delta} \varphi \rangle.$$

Si $\alpha > 0$, on peut remplacer dans cette proposition $e^{-t\Delta} f \in L^p(G)$ par $f \in L^p(G)$ dans 2, et $\int_0^1$ par $\int_0^{+\infty}$.

Comme dans la proposition 1.3.3, on peut également caractériser les espaces de Besov en utilisant des différences finies ([SC90, Théorème 2], [GS12, Proposition 3.1]). Pour toute fonction f sur G et tous $x, y \in G$, on pose

$$\nabla_y f(x) := f(xy) - f(x).$$

Proposition 1.3.9. *Soient* $\alpha \in (0,1)$, $1 \leq p \leq \infty$ *et* $1 \leq q \leq \infty$. *Alors, pour toute fonction mesurable* f *sur* G, $\|f\|_{B_\alpha^{p,q}(G)} \simeq L_\alpha^{p,q}(f)$ *avec*

$$L_\alpha^{p,q}(f) := \left(\int_G \left(\frac{\|\nabla_y f\|_{L^p(G)}}{|y|^\alpha} \right)^q \frac{dy}{V(|y|)} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Les espaces de Besov possèdent la propriété d'algèbre suivante ([GS12, Theorem 1]) :

Proposition 1.3.10. *Soient* $\alpha \in (0,1)$, $1 \leq p \leq \infty$ *et* $1 \leq q \leq \infty$. *L'espace* $B_\alpha^{p,q}(G) \cap L^\infty(G)$ *est une algèbre pour le produit ponctuel. Plus précisément, il existe* $C > 0$ *telle que, pour tous* $f, g \in B_\alpha^{p,q}(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$, *on a*

$$\|fg\|_{B_\alpha^{p,q}} \leq C \left(\|f\|_{B_\alpha^{p,q}} \|g\|_{L^\infty} + \|f\|_{L^\infty} \|g\|_{B_\alpha^{p,q}} \right). \tag{1.18}$$

Si $\alpha \geq 1$, *on a la même conclusion si on suppose* $1 < p < \infty$ *et* $1 \leq q \leq \infty$.

Cette proposition étend le résultat de la proposition 1.3.5 au cas des groupes de Lie à croissance polynomiale. La preuve pour $\alpha \in (0,1)$ est une conséquence facile de la proposition 1.3.9. Le cas $\alpha \geq 1$ se déduit du cas $\alpha < 1$ par une caractérisation récursive des espaces de Besov : $f \in B_{\alpha+1}^{p,q}(G)$ si, et seulement si, $f \in B_\alpha^{p,q}(G)$ et $X_i f \in B_\alpha^{p,q}(G)$ pour tout $i \in [\![1, k]\!]$. L'argument présenté dans [GS12] pour le cas $\alpha \geq 1$ semble toutefois incomplet [13].

Rappelons (Propositions 1.3.4 et 1.3.8) que les espaces de Besov sur $\mathbb{R}^d$ ou plus généralement dans un groupe de Lie à croissance polynomiale peuvent être caractérisés au moyen du noyau de la chaleur associé au (sous)-laplacien considéré. Cela conduit (pour $\alpha \in (-1,1)$) à une définition générale des espaces de Besov associés à des opérateurs L dans des espaces métriques mesurés X dont le volume des boules croît de manière au plus polynomiale ([BDY12], avec une hypothèse de majoration gaussienne ponctuelle pour le noyau de e^{-tL}, une autre approche nécessitant de la régularité sur le noyau de e^{-tL} avait été proposée dans [DHY06]). Cette étude a été complétée dans [GLre], où une caractérisation par différences finies est aussi prouvée. Des résultats d'injections pour ces espaces sont établis dans [BB15].

13. La preuve donnée dans le paragraphe 3.2 de [GS12], semble conduire à l'inégalité $\|fg\|_{B_{\alpha+1}^{p,q}} \lesssim (\|f\|_{B_{\alpha+1}^{p,q}} + \|f\|_{L^\infty})(\|g\|_{B_{\alpha+1}^{p,q}} + \|g\|_{L^\infty})$. On obtiendrait donc la propriété d'algèbre mais avec une estimation plus faible.

1.3.4 Espaces de Sobolev fractionnaires sur les groupes de Lie

Les propriétés d'algèbre, ainsi que les caractérisations en termes de différences finies pour les espaces de Besov rappelées dans les propositions 1.3.5 et 1.3.10 ont des analogues dans l'échelle des espaces de Bessel L^p_α. Nous rappelons ici les résultats obtenus dans le cas des groupes de Lie, dont les idées de preuves ont partiellement inspiré les résultats de ce mémoire concernant les espaces de Besov sur les groupes de Lie.
Soit $(G, \mathbb{X})$ un groupe de Lie unimodulaire muni d'un système de champs de vecteurs comme dans le paragraphe 1.3.3. Si $\alpha \geq 0$ et $p \in [1, +\infty]$, on définit

$$L^p_\alpha(G) := \left\{ f \in L^p(G);\ \Delta^{\frac{\alpha}{2}} f \in L^p(G) \right\},$$

muni de la norme

$$\|f\|_{L^p_\alpha(G)} := \|f\|_{L^p(G)} + \left\|\Delta^{\frac{\alpha}{2}} f\right\|_{L^p(G)}.$$

Cette définition étend bien celle de $\mathbb{R}^d$ ([Ste70a, Chapter 5]). Les propriétés d'algèbre de ces espaces pour $1 < p < +\infty$ ont été étudiées dans [CRTN01]. Si S_α est défini par

$$S_\alpha f(x) = \left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{r^\alpha V(r)} \int_{y \in B(x,r)} |f(y) - f(x)| dy \right)^2 \frac{dr}{r} \right)^{\frac{1}{2}},$$

on a l'équivalence, pour toute $f \in L^p(G)$ ([CRTN01, Theorem 5])

$$\|f\|_{L^p_\alpha} \simeq \|S_\alpha f\|_{L^p} + \|f\|_{L^p} \tag{1.19}$$

pour tout $\alpha \in (0,1)$ et tout $p \in (1, +\infty)$. On en déduit la propriété d'algèbre suivante : si $f, g \in L^p_\alpha(G) \cap L^\infty(G)$, alors $fg \in L^p_\alpha(G) \cap L^\infty(G)$ et

$$\|fg\|_{L^p_\alpha} \lesssim \|f\|_{L^p_\alpha} \|g\|_{L^\infty} + \|f\|_{L^\infty} \|g\|_{L^p_\alpha} \tag{1.20}$$

pour $\alpha \in (0,1)$ et $p \in (1, +\infty)$.

Enonçons maintenant la règle de Leibniz. Cette règle ([CRTN01, Theorem 4]) affirme que

$$\|fg\|_{L^r_\alpha} \lesssim \|f\|_{L^{p_1}_\alpha} \|g\|_{L^{q_1}} + \|f\|_{L^{p_2}} \|g\|_{L^{q_2}_\alpha} \tag{1.21}$$

dès que $f \in L^{p_1}_\alpha \cap L^{p_2}$, $g \in L^{q_2}_\alpha \cap L^{q_1}$ et $\frac{1}{r} = \frac{1}{p_i} + \frac{1}{q_i}$ pour $i \in \{1,2\}$.
Les espaces L^p_α possèdent la propriété de récursivité suivante ([CRTN01, Proposition 19]) : $f \in L^p_{\alpha+1}$ si, et seulement si, $f \in L^p_\alpha$ et $X_i f \in L^p_\alpha$ pour tout $1 \leq i \leq k$ [14] Cette propriété permet de montrer que, si (1.21) est satisfaite pour un $\alpha > 0$, alors elle est satisfaite pour $\alpha + 1$ ([CRTN01, Section 3.2]). Il suffit donc de prouver (1.21) pour $\alpha \in (0,1)$.

Dans [BBR12], les auteurs présentent deux approches pour montrer la propriété d'algèbre (1.20) sur des variétés riemanniennes pour $\alpha \in (0,1)$ sous des hypothèses convenables [15]. La première utilise les fonctionnelles de Strichartz S_α, et la seconde méthode, qui montre plus généralement une règle de Leibniz (1.21), utilise des paraproduits (dont

14. La preuve utilise en particulier le fait que, pour tout entier k, les espaces $L^p_k(G)$ et $W^{k,p}(G)$ coïncident, où l'espace de Sobolev $W^{k,p}(G)$ est défini au moyen des champs de vecteurs X_i. Ce dernier fait signifie que les transformées de Riesz itérées locales $X_I(\Delta + \mathrm{Id})^{-|I|/2}$ sont bornées sur $L^p(G)$ pour tout $1 < p < +\infty$.

15. Le cas $\alpha > 1$ est très peu considéré dans [BBR12], car les hypothèses connues sur la variété M qui garantissent la coïncidence de L^p_k et $W^{k,p}$ sont trop fortes.

l'idée remonte à [Bon81]) et qui permettent aussi de montrer la propriété d'algèbre dans les espaces de Besov sur $\mathbb{R}^d$, voir la proposition 1.3.5, ainsi que la règle de Leibniz pour les espaces $L^p_\alpha(\mathbb{R}^d)$ ([BMN10]). Dans le contexte de [BBR12], l'approche par paraproduits consiste à écrire

$$fg = \Pi(f,g) + \Pi_f(g) + \Pi_g(f)$$

où

$$\Pi(f,g) = \int_0^\infty \psi_t(L)(\phi_t(L)f \cdot \phi_t(L)g)\frac{dt}{t}$$

et

$$\Pi_f(g) = \int_0^\infty \phi_t(L)(\phi_t(L)f \cdot \psi_t(L)g)\frac{dt}{t}$$

où ψ et ϕ sont des fonctions bien choisies et L le (sous)-laplacien considéré. Nous reviendrons sur cette approche dans le chapitre 4.

1.4 Description rapide des résultats du mémoire

Nous présentons ici brièvement les principaux résultats de ce mémoire, renvoyant aux chapitres suivants pour des énoncés détaillés.

1.4.1 Fonctionnelles de Littlewood-Paley sur les graphes

Les principaux résultats du deuxième chapitre de ce mémoire concernent la continuité L^p de g^d_β et $\tilde{g}^d_\beta$. Le cadre est celui d'un graphe connexe Γ localement uniformément fini, muni de la distance naturelle d, d'une mesure m et d'un opérateur de Markov P, de noyau p. Le laplacien considéré est l'opérateur $I-P$. Pour tout entier $l \geq 1$, on note p_l le noyau de P^l. Pour tout $x \in \Gamma$ et tout $k \geq 1$, on note $V(x,k)$ la mesure de la boule ouverte de centre x et de rayon k. Les énoncés qui suivent font intervenir différentes hypothèses.
On dit que Γ vérifie la propriété de doublement local si, et seulement si, pour tout $x \in \Gamma$,

$$V(x,2) \lesssim V(x,1). \tag{1.22}$$

On dit que Γ vérifie la propriété de doublement global si, et seulement si, pour tout $x \in \Gamma$ et tout $k \geq 1$,

$$V(x,2k) \lesssim V(x,k). \tag{1.23}$$

On dit que p_l vérifie une majoration gaussienne ponctuelle si, et seulement si, il existe $c > 0$ tel que, pour tous $x, y \in \Gamma$ et tout $k \geq 1$,

$$p_l(x,y) \lesssim \frac{1}{V(x,\sqrt{k})} \exp\left(-c\frac{d^2(x,y)}{k}\right). \tag{1.24}$$

On renvoie au paragraphe 2.1 pour des définitions complètes.

Nous obtenons les résultats suivants :

Théorème 1.4.1. *Soit Γ un graphe connexe localement uniformément fini. Alors*

(a) sous l'hypothèse (1.22), la fonctionnelle $\tilde{g}^d_0$ est continue sur L^p pour tout $p \in (1,2]$.

(b) sous les hypothèses (1.23) et (1.24), alors g^d_β et $\tilde{g}^d_\beta$ sont de type $(1,1)$ faible et bornées sur L^p pour $1 < p \leq 2$,

(c) *si on suppose en plus que* Γ *vérifie une inégalité de Poincaré* L^2 *sur les boules et que* $\sqrt{l}\nabla P^l$ *est uniformément borné sur* L^q *pour un* $q > 2$*, alors* $\tilde{g}^d_\beta$ *est continue pour tout* $p \in (2, q)$*.*

Ces résultats permettent d'obtenir, sur un graphe Γ vérifiant des hypothèses convenables, la version discrète des résultats de [CRTN01]. Les récents développements de [BCF14] permettront probablement d'améliorer les énoncés, y compris dans un contexte discret. Cela pourra faire l'objet d'un travail ultérieur.

1.4.2 Espaces de Hardy sur des graphes

Le troisième chapitre porte sur les espaces de Hardy et comprend deux résultats de nature différente.

Le premier de ces résultats concerne la continuité H^1 des transformées de Riesz sur les graphes, dans l'esprit du Théorème 1.2.3, c'est-à-dire faisant intervenir des 1-formes différentielles. Il est possible de donner un sens à la notion de 1-forme différentielle dans ce contexte (il s'agit de fonctions définies sur l'ensemble T_Γ des arêtes du graphe, suivant des idées de [BR09]). On définit également la différentielle d, de telle sorte que $|d| = \nabla$, la "longueur du gradient".

On a alors :

Théorème 1.4.2. *Soit* Γ *un graphe connexe localement uniformément fini vérifiant* (1.23). *Il existe un espace de Hardy de fonctions (noté* $H^1(\Gamma)$*) et un espace de Hardy de* 1*-formes différentielles (noté* $H^1(T_\Gamma)$*) tels que*

- *L'espace* $H^1(\Gamma) \subset L^1(\Gamma)$ *est caractérisé de manière équivalente en terme de fonctionnelles de Lusin ou en terme de décomposition en atomes.*
- *L'espace* $H^1(T_\Gamma) \subset L^1(T_\Gamma)$ *est caractérisé de manière équivalente en terme de fonctionnelles de Lusin ou en terme de décomposition en atomes.*
- *La transformée de Riesz* $d\Delta^{-\frac{1}{2}}$ *est continue de* $H^1(\Gamma)$ *dans* $H^1(T_\Gamma)$*.*

Dans le théorème 1.4.2, la continuité $H^1 - H^1$, donc $H^1 - L^1$ de la transformée de Riesz est établie sous la seule hypothèse (1.23). On ne sait pas si cette condition suffit à obtenir la continuité L^p de $\nabla\Delta^{-1/2}$ pour $1 < p < 2$. En particulier, on ne sait pas si un opérateur continu de $H^1(\Gamma)$ dans $L^1(\Gamma)$ et de $L^2(\Gamma)$ dans lui-même est aussi continu sur $L^p(\Gamma)$ pour $1 < p < 2$.

On sait par contre ([Rus00, Theorem 1]) que, sous les hypothèses (1.23) et (1.24), alors $\nabla\Delta^{-1/2}$ est continu sur L^p pour $1 < p < 2$ et de type $(1, 1)$ faible. Dans la suite, nous allons montrer un résultat analogue, en supposant que le noyau de P^l vérifie une majoration ponctuelle plus générale, faisant intervenir une quasi-métrique ρ sur le graphe. Cette classe de majorations englobe le cas gaussien, mais aussi des situations où la majoration gaussienne (1.24) n'est pas vérifiée. La méthode consiste à définir un espace de Hardy H^1 associé au laplacien, montrer la continuité H^1 de la transformée de Riesz puis interpoler avec L^2. Plus précisément, on appellera quasidistance adaptée à (Γ, P) (ou Γ) toute quasidistance ρ vérifiant

$$p_{k-1}(x, y) \leq \frac{C}{V_\rho(x, k)} \exp\left(-c\left(\frac{\rho(x, y)}{k}\right)^\eta\right) \qquad \forall x, y \in \Gamma, \forall k \in \mathbb{N}^* \qquad (\mathrm{UE}_\rho)$$

pour des constantes $C, c > 0$ et $\eta \in (0,1]$. En particulier, si on a (1.24), alors (UE_ρ) est vérifiée avec $\rho = d^2$. Si le graphe vérifie des estimations sous-gaussiennes (comme dans le cas des tapis de Sierpinski, [BB99]), (UE_ρ) sera vérifiée avec $\rho = d^\beta$, pour un $\beta \geq 2$ fixé. Nous avons alors :

Théorème 1.4.3. *Soit Γ un graphe connexe localement uniformément fini. On suppose qu'il existe une quasidistance ρ adaptée à Γ et satisfaisant une propriété de doublement pour le volume des boules. Alors il existe un espace de Hardy pour les fonctions (noté $H^1(\Gamma)$) et un espace de Hardy pour les 1-formes différentielles (noté $H^1(T_\Gamma)$) tels que*
- *L'espace $H^1(\Gamma) \subset L^1(\Gamma)$ est caractérisé de manière équivalente en terme de fonctionnelles de Lusin ou en terme de décomposition en atomes.*
- *L'espace $H^1(T_\Gamma) \subset L^1(T_\Gamma)$ est caractérisé de manière équivalente en terme de fonctionnelles de Lusin ou en terme de décomposition en atomes.*
- *Si T est un opérateur continu de $H^1(\Gamma)$ dans $L^1(\Gamma)$ et sur $L^2(\Gamma)$, alors T est continu sur $L^p(\Gamma)$.*
- *La transformée de Riesz $d\Delta^{-\frac{1}{2}}$ est continue de $H^1(\Gamma)$ dans $H^1(T_\Gamma)$. Ainsi $\nabla\Delta^{-\frac{1}{2}}$ est continue de $H^1(\Gamma)$ dans $L^1(\Gamma)$, et sur $L^p(\Gamma)$ pour tout $p \in (1,2)$.*

Ce dernier théorème, dont on pourrait donner une version analogue dans une variété riemannienne, améliore un résultat de Chen ([Che14, Theorem 0.32]). Elle y énonce la continuité $L^p(\Gamma)$, $p \in (1,2)$ des quasi transformées de Riesz $\nabla\Delta^{-\alpha}$ pour $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ sous des conditions très faibles. Lorsque le noyau de Markov vérifie les estimations sous-gaussiennes

$$p_{k-1}(x,y) \lesssim \frac{1}{V\left(x, k^{\frac{1}{\beta}}\right)} \exp\left(-c\left(\frac{d^\beta(x,y)}{k}\right)^{\frac{1}{\beta-1}}\right),$$

elle montre aussi que $\nabla\Delta^{-\alpha}$ est de type $(1,1)$ faible et définit des espaces de Hardy de fonctions (mais pas de 1-formes) similaires à ceux introduits dans le présent mémoire. Notons que [Che14] ne donne pas de résultat de continuité L^p pour $\nabla\Delta^{-1/2}$. Nous montrons dans ce mémoire plus de propriétés sur nos espaces Hardy de fonctions que dans [Che14]. Une comparaison plus détaillée sera faite au paragraphe D.1.5.

1.4.3 Espaces de Besov sur les groupes de Lie

On donne d'abord une définition des espaces de Besov inhomogènes sur des groupes de Lie unimodulaires (à croissance polynomiale ou exponentielle) par une décomposition de Littlewood-Paley adaptée (faisant intervenir le semigroupe de la chaleur) et on donne plusieurs définitions équivalentes de ce type.
On donne ensuite une caractérisation en termes de différences finies, dont on déduit une propriété d'algèbre. On donne une autre approche de cette propriété, et plus généralement de la règle de Leibniz, par des paraproduits. Nous obtenons en particulier :

Théorème 1.4.4. *Soient G un groupe de Lie unimodulaire, $p, q \in [1, +\infty]$ et $\alpha > 0$. Il existe $C > 0$ tel que*

$$\|fg\|_{B_\alpha^{p,q}} \lesssim \|f\|_{B_\alpha^{p,q}} \|g\|_{L^\infty} + \|f\|_{L^\infty} \|g\|_{B_\alpha^{p,q}}.$$

Nous étendons ainsi les résultats de [GS12], qui ne concernent que le cas de la croissance polynomiale, et qui excluent les valeurs limites de p (1 et $+\infty$) lorsque $\alpha \geq 1$. La question des espaces de Besov homogènes semble plus délicate, nous reviendrons sur ce point dans la remarque 4.7.5.

Chapitre 2

Graphes et fonctionnelles de Littlewood-Paley

Dans ce chapitre, nous allons présenter les résultats obtenus par l'auteur dans l'article [Fen15b] (rappelé dans le chapitre A) portant sur la continuité L^p des fonctionnelles de Littlewood-Paley discrètes.

Nous présenterons précisément les graphes. Nous discuterons ensuite sur les hypothèses que l'on met sur les graphes sur lesquels on travaille, en commençant par les conditions les plus faibles que nous considèrerons pour aller vers les plus fortes, et en présentant les liens entre les unes et les autres. Nous finirons par présenter les outils de démonstration utilisés, renvoyant à [Fen15b] pour les preuves exactes.

2.1 Présentation des graphes

Dans l'ensemble de cette thèse, nous appellerons graphe (pondéré non-orienté) tout couple (Γ, μ) où Γ est un ensemble infini et $\mu : \begin{array}{ccc} \Gamma \times \Gamma & \to & \mathbb{R}_+ \\ (x,y) & \mapsto & \mu_{xy} \end{array}$ un poids symétrique sur $\Gamma \times \Gamma$.

Nous retrouvons une structure "classique" de graphe si nous définissons Γ comme l'ensemble des sommets et l'ensemble

$$E = \{(x,y) \in \Gamma \times \Gamma,\ \mu_{xy} > 0\}$$

comme étant l'ensemble des arêtes. Nous dirons alors que x et y sont voisins (et on notera $x \sim y$) ssi $(x,y) \in E$. On vérifie que le graphe est bien non orienté, c'est-à-dire que $(x,y) \in E \Leftrightarrow (y,x) \in E$, car le poids μ est symétrique.

Nous supposerons toujours que le graphe est connexe et localement uniformément fini. Un graphe Γ est connexe si pour tous $x, y \in \Gamma$, il existe un chemin $x = x_0, x_1, \dots, x_n = y$ tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $x_{i-1} \sim x_i$ (la longueur d'un tel chemin est alors n). Un graphe Γ est dit localement uniformément fini si le nombre de voisins d'un sommet est uniformément borné, c'est-à-dire s'il existe $M_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $x \in \Gamma$, $\#\{y \in \Gamma,\ y \sim x\} \leq M_0$.

Le graphe est muni d'une métrique naturelle d, où $d(x,y)$ est définie, pour tous $x, y \in \Gamma$, comme la longueur du plus court chemin reliant les deux sommets x et y. Pour tout $x \in \Gamma$ et tout $r > 0$, la boule de centre x et de rayon r est définie par $B(x,r) = \{y \in \Gamma,\ d(x,y) < r\}$. À l'inverse, remarquons que l'on a :

Lemme 2.1.1. *Si* $(x,r) \in \Gamma \times \mathbb{R}_+^*$, *alors* $B(x,r) = B(x, \lceil r \rceil)$ *où* $\lceil r \rceil$ *indique le seul entier tel que* $\lceil r \rceil - 1 < r \leq \lceil r \rceil$.

De plus, si $(x,y,r,s) \in \Gamma^2 \times (\mathbb{N}^*)^2$ *sont tels que* $B(x,r) = B(y,s)$ *alors* $r \simeq s$ *(en fait* $r \leq 2s \leq 4r$*) et* $d(x,y) \leq \min\{r,s\} - 1$.

Pour toute boule $B = B(x,r)$ et tout $\lambda > 0$, on définit $\lambda B := B(x, \lambda r)$. On introduit ensuite les ensembles $C_j(B) := 2^{j+1}B \backslash 2^j B$ pour $j \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ et $C_1(B) = 4B$.

Remarque 2.1.2. *Les notations* λB *et* $C_j(B)$ *sont abusives (on devrait écrire* $\lambda B(x,r)$ *ou* $B(x,\lambda r)$ *et* $C_j(B(x,r))$ *ou* $C_j(x,r)$*) mais commodes. De plus, on parlera facilement "du" rayon d'une boule même s'il n'est pas uniquement déterminé. Nous laissons cependant le lecteur remarquer que cela n'a aucune incidence sur les preuves.*

Nous définissons le poids $m(x)$ d'un sommet $x \in \Gamma$ par la somme du poids des arêtes, i.e. $m(x) := \sum\limits_{x \sim y} \mu_{xy}$. Plus généralement, le poids (ou mesure ou volume) d'un ensemble E est défini par $m(E) := \sum_{x \in E} m(x)$. On utilise la notation $V(x,r)$ pour le volume de la boule $B(x,r)$ et $V(B)$ pour le volume de la boule B.

Des exemples de graphes sont donnés par les graphes de Cayley de groupes discrets (par exemple $\mathbb{Z}^d$), dont la définition est donnée ci-dessous :

Définition 2.1.3. *Soit* G *un groupe infini de type fini et* S *une partie génératrice symétrique (c'est-à-dire* $s \in S \Leftrightarrow s^{-1} \in S$*) finie du groupe* G*. Soit* n *le cardinal de* S.

Le graphe de Cayley de (G,S) *(ou* G *par abus de notation) est le graphe* (G,μ) *avec* $\mu_{xy} = \frac{1}{n}$ *si* $x^{-1}y \in S$ *et* $\mu_{xy} = 0$ *sinon.*

Le poids sur les arêtes nous permet de construire une marche aléatoire sur le graphe. Si $x,y \in \Gamma$, le noyau de Markov p est défini par $p(x,y) = \frac{\mu_{xy}}{m(x)m(y)}$. Remarquons que $p(x,y) = p(y,x)$, ce qui revient à dire que la marche aléatoire est réversible par rapport à la mesure m.

Le noyau discret $p_l(x,y)$ est alors défini récursivement pour tout $l \geq 0$ par

$$\begin{cases} p_0(x,y) = \frac{\delta(x,y)}{m(y)} \\ p_{l+1}(x,y) = \sum_{z \in \Gamma} p(x,z) p_l(z,y) m(z). \end{cases} \tag{2.1}$$

Remarque 2.1.4. *Notons que la définition de* p_l *diffère de celle donnée dans [Rus00], [BR09] ou [Del99], à cause du facteur* $m(y)$*. Cependant* p_l *coïncide avec* K_l *dans [Dun06]. Remarquons que dans le cas des graphes de Cayley de groupes discrets, où* $m(x) = 1$ *pour tout* x*, les définitions sont identiques.*

Nous définissons maintenant les espaces $L^p(\Gamma)$. Pour $p \in [1, +\infty)$, une fonction f définie sur Γ appartient à $L^p(\Gamma, m)$ (ou $L^p(\Gamma)$) ssi

$$\|f\|_p := \left(\sum_{x \in \Gamma} |f(x)|^p m(x) \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty,$$

tandis que $L^\infty(\Gamma)$ est l'espace des fonctions satisfaisant

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in \Gamma} |f(x)| < +\infty.$$

Observons que lorsque $l \geq 1$, nous avons

$$\|p_l(x,.)\|_{L^1(\Gamma)} = \sum_{y \in \Gamma} p_l(x,y)m(y) = \sum_{d(x,y)\leq l} p_l(x,y)m(y) = 1 \qquad \forall x \in \Gamma. \tag{2.2}$$

Pour toute fonction f sur Γ, nous définissons P comme l'opérateur de noyau p, i.e.

$$Pf(x) = \sum_{y \in \Gamma} p(x,y)f(y)m(y) \qquad \forall x \in \Gamma. \tag{2.3}$$

Remarque 2.1.5. *Un opérateur P est appelé opérateur de Markov symétrique (ou réversible par rapport à m) ssi le noyau de p de P, défini comme en* (2.3)*, est symétrique et vérifie* (2.2)*.*

Donner (Γ, μ) est équivalent à donner (Γ, m, P) où m est la mesure et P est un opérateur de Markov symétrique.

Il est facile de vérifier que, pour tout $l \in \mathbb{N}$, P^l est l'opérateur de noyau p_l.

Remarque 2.1.6. *Même si la définition de p_l est différente de celle de [Rus00] ou [BR09], P^l est le même opérateur dans les deux cas.*

Comme l'égalité (2.2) est vérifiée, on a, pour tout $p \in [1, +\infty]$,

$$\|P\|_{p\to p} \leq 1. \tag{2.4}$$

Remarque 2.1.7. *Soit $1 < p < +\infty$. Comme, pour tout $l \geq 0$, $\left\|P^l\right\|_{p\to p} \leq 1$, les opérateurs $(I-P)^\beta$ et $(I+P)^\beta$ sont bornés dans L^p pour tout $\beta > 0$ (cf [CSC90], p. 423).*

Nous définissons maintenant un laplacien positif sur Γ par $\Delta = I - P$. On a alors

$$\begin{aligned} < \Delta f, f >_{L^2(\Gamma)} &= \sum_{x,y \in \Gamma} p(x,y)(f(x) - f(y))f(x)m(x)m(y) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{x,y\in\Gamma} p(x,y)|f(x) - f(y)|^2 m(x)m(y), \end{aligned} \tag{2.5}$$

en utilisant (2.2) pour la première égalité et la symétrie du noyau $p(x,y)$ pour la seconde. Le dernier calcul montre que l'opérateur

$$\nabla f(x) = \left(\frac{1}{2} \sum_{y\in\Gamma} p(x,y)|f(y) - f(x)|^2 m(y) \right)^{\frac{1}{2}},$$

appelé “longueur du gradient” (et dont la définition est tirée de [CG98]) vérifie

$$< \Delta f, f >_{L^2(\Gamma)} = \|\nabla f\|^2_{L^2(\Gamma)}. \tag{2.6}$$

2.2 Hypothèses d'analyticité et de doublement

Commençons par présenter les hypothèses les plus faibles que nous considèrerons. La première hypothèse est la propriété de doublement :

Définition 2.2.1 (Propriété de doublement)**.** *Le graphe pondéré* (Γ, μ) *satisfait la propriété de doublement s'il existe* $C > 0$ *tel que*

$$V(x, 2r) \leq CV(x, r) \qquad \forall x \in \Gamma, \forall r > 0. \tag{DV}$$

Rappelons que sous l'hypothèse (DV), il existe $d > 0$ tel que

$$V(x, \lambda r) \lesssim \lambda^d V(x, r) \qquad \forall r > 0,\ x \in \Gamma,\ \lambda \geq 1. \tag{2.7}$$

Remarque 2.2.2. *Supposer* (DV) *signifie que* (Γ, m, d) *est un espace de nature homogène ([CW77]).*

Certains graphes ne vérifient pas (DV)*, comme par exemple* $\mathbb{F}_2$*, le groupe des mots de deux lettres ou l'arbre binaire (sans feuilles / de profondeur infinie), pour lequel la croissance du volume est exponentielle. On peut aussi avoir une croissance intermédiaire, même dans le cas de graphes de Cayley de groupes ([Gri84]), c'est-à-dire que* $\exp\left(C^{-1} r^{\beta}\right) \leq V(x, r) \leq \exp\left(Cr^{\alpha}\right)$ *pour tout* $x \in \Gamma$ *et tout* $r \geq 1$*, avec* $0 < \beta \leq \alpha < 1$*.*

Nous aurons aussi besoin d'une version locale de (DV) pour énoncer certains de nos résultats.

Définition 2.2.3. *On dit que* (Γ, μ) *satisfait* (LDV) *s'il existe* $c > 0$ *tel que*

$$V(x, 2) \leq cm(x) \qquad \forall x \in \Gamma. \tag{LDV}$$

Remarque 2.2.4. *L'hypothèse* (LDV) *est équivalente à la conjonction des deux conditions suivantes :*

(i) Le graphe est uniformément localement fini (toujours satisfaite par hypothèse sur le graphe, d'après le paragraphe précédent),

(ii) Pour tous $x, y \in \Gamma$ *,* $x \sim y \Rightarrow m(x) \simeq m(y)$*.*

Notre deuxième hypothèse est

Définition 2.2.5. *Un graphe* (Γ, μ) *satisfait* (LB) *s'il existe* $\epsilon > 0$ *tel que*

$$\mu_{xx} \geq \epsilon m(x) \qquad \forall x \in \Gamma. \tag{LB}$$

Remarque 2.2.6. *Présentons une hypothèse plus forte que* (LB) *: il existe* $\epsilon > 0$ *tel que pour tout* $x \in \Gamma$*,* $x \sim x$ *et*

$$\mu_{xy} \geq \epsilon m(x) \qquad \forall x \sim y. \tag{LB$_2$}$$

Même si (LB$_2$) *joue un rôle important dans des estimations de régularité parabolique sur les graphes ([Del99]), nous ne ferons pas cette hypothèse dans les résultats obtenus dans ce mémoire. Elle n'interviendra que dans les rappels de certains résultats obtenus par d'autres auteurs.*

Remarque 2.2.7. *Du fait de* (2.4), *on sait que* $\mathrm{Sp}_{L^2}(P) \subset [-1,1]$.

L'hypothèse (LB) *implique (voir par exemple [Dun06]) que* -1 *n'est pas dans le spectre* L^2 *de* P, *et implique que pour tout* $j \in \mathbb{N}$, *il existe* $C_j > 0$ *tel que*

$$\|\Delta^j P^{l-1}\|_{2\to 2} \leq \frac{C_j}{l} \qquad \forall l \in \mathbb{N}^*,$$

qu'on traduit par l'analyticité de P *dans* $L^2(\Gamma)$, *est la version discrète des estimations* $\|\Delta^j e^{-t\Delta} f\|_{2\to 2} \lesssim \frac{1}{t^j}$.

Une conséquence est qu'on a alors pour tout $p \in (1,+\infty)$, *on a (cf [CSC90])*

$$\|\Delta^j P^{l-1}\|_{p\to p} \leq \frac{C_j}{l} \qquad \forall l \in \mathbb{N}^*.$$

Notons que l'hypothèse (LB) *est vérifiée par* P^2 *dès lors que le graphe* Γ *vérifie* (LDV) *(cf [CGZ05]).*

Nous savons que si le graphe satisfait (LB), alors -1 n'est pas dans le spectre de P dans L^2. A-t-on la réciproque ? Non, mais nous montrons le résultat suivant (voir Chapitre B).

Théorème 2.2.8. *Soient* (Γ, m) *un graphe vérifiant* (DV) *et* P *un opérateur de Markov réversible par rapport à la mesure* m. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $-1 \in Sp_{L^q}(P)$ *pour tout* $q \in [1,+\infty)$,

(ii) $-1 \in Sp_{L^2}(P)$,

(iii) pour tout $k \in \mathbb{N}$, (Γ, m, P^{2k+1}) *ne satisfait pas* (LB).

L'hypothèse (DV) peut être légèrement affaiblie (voir chapitre B). Néanmoins, dans notre preuve, nous avons besoin d'une hypothèse "de doublement" plus forte que la propriété de doublement locale (LDV). Notons aussi que l'assertion (i) du théorème inclut le cas $q = 1$.

2.3 Estimations sur le noyau de Markov

Même dans des graphes très simples, le noyau du semigroupe engendré par Δ ne vérifie pas de borne supérieure gaussienne, contrairement à ce qui se passe pour le noyau de la chaleur dans $\mathbb{R}^d$ ou certaines variétés riemanniennes.

En effet, Pang a montré dans [Pan93] des estimations ponctuelles non gaussiennes pour le noyau h_t de $e^{-t\Delta}$ lorsque Δ est le laplacien sur $\mathbb{Z}^d$ [1] :

$$h_t(x,y) \lesssim t^{-\frac{d}{2}} \exp\left[c_1 d F\left(c_2 \frac{d}{2t}\right)\right]$$

où $d = d(x,y)$ est la distance entre x et y et F est telle que

$$F(x) \simeq \begin{cases} -x & \text{lorsque } x \text{ est petit} \\ -\log(x) & \text{lorsque } x \text{ est grand.} \end{cases}$$

1. En fait, Pang suppose une condition sur ses graphes, vérifiée par $\mathbb{Z}^d$.

Nous pouvons observer que ces estimations sont gaussiennes lorsque $\frac{d}{t}$ est petit mais ne le sont plus lorsque $\frac{d}{t}$ est grand.

De plus, Pang a montré que ces estimations sont optimales lorsque le graphe est celui de Cayley de $\mathbb{Z}$.

En particulier, nous n'avons pas d'estimations de Gaffney (1.14) pour $e^{-t\Delta}$, le semigroupe engendré par le laplacien . Néanmoins, il a été constaté que dans le cas des graphes, la chaine de Markov P^l est susceptible d'avoir des propriétés analogues à celles du semi-groupe sur des variétés riemanniennes. En effet, sous des conditions très faibles, un graphe satisfait des estimations de type Gaffney pour P^l (démontrées par Coulhon, Grigor'yan et Zucca dans [CGZ05]) :

Théorème 2.3.1. *Soit* (Γ, μ) *un graphe satisfaisant* (LB) *ou bien* (LDV). *Alors il existe des constantes* $C, c > 0$ *telles que, pour tous* $E, F \subset \Gamma$ *et toute fonction* f *à support dans* F, *on ait*

$$\|P^{l-1}f\|_{L^2(E)} \leq C \exp\left(-c\frac{d(E,F)^2}{l}\right) \|f\|_{L^2} \qquad \forall l \in \mathbb{N}^*. \tag{GUE}$$

Il nous sera souvent utile d'avoir des estimations ponctuelles du noyau p_l.

Définition 2.3.2 (Estimations supérieures diagonales de p_l)**.** *On dit que* (Γ, μ) *satisfait* (DUE) *s'il existe une constante* $C > 0$ *telle que, pour tout* $x \in \Gamma$ *et tout* $l \in \mathbb{N}^*$,

$$p_{l-1}(x,x) \leq \frac{C}{V(x, \sqrt{l})}. \tag{DUE}$$

Remarque 2.3.3. *Ces estimations ponctuelles sont vérifiées dès lors que* Γ *est le graphe de Cayley d'un groupe discret à croissance polynomiale (cf [HSC93]). Elles restent vraies par exemple pour le graphe* Γ *constitué de deux copies de* $\mathbb{Z}^d$ *reliées par une arête.*

L'union des trois hypothèses (LB), (DV) et (DUE) nous donne des estimations supplémentaires sur le noyau p_l. Premièrement, on a ([CG98, Theorem 1.1] ou [CGZ05, Theorem 5.2, Theorem 6.1]) :

Proposition 2.3.4. *Soit* (Γ, μ) *un graphe pondéré vérifiant* (DV) *et* (LB). *Alors* (DUE) *est équivalent à l'estimation gaussienne supérieure suivante :*

$$p_{l-1}(x,y) \leq C \left(\frac{1}{V(x,\sqrt{l})V(y,\sqrt{l})}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-c\frac{d^2(x,y)}{l}\right) \qquad \forall x,y \in \Gamma,\ \forall l \in \mathbb{N}^*. \tag{UE}$$

En outre, (DUE) *implique l'estimation diagonale inférieure :*

$$p_{l-1}(x,x) \geq \frac{c}{V(x,\sqrt{l})} \qquad \forall x \in \Gamma,\ \forall l \in \mathbb{N}^*. \tag{DLE}$$

Remarque 2.3.5. *[CG98, Theorem 1.1] nous donne en réalité que la conjonction de* (DUE) *et* (DV) *est équivalente à une inégalité relative de Faber-Krahn, qui signifie qu'il existe des constantes* $a, \nu > 0$ *telles que pour toute boule* $B(x,r)$ *avec* $x \in \Gamma$ *et* $r \geq \frac{1}{2}$ *et pour tout sous-ensemble non vide* $\Omega \subset B(x,r)$, *on ait*

$$\lambda_1(\Omega) \geq \frac{a}{r^2}\left(\frac{V(x,r)}{|\Omega|}\right)^{\nu},$$

où $\lambda_1(\Omega)$ est la première valeur propre de Δ avec condition de Dirichlet dans Ω, aussi égale à

$$\lambda_1(\Omega) = \inf \left\{ \frac{\|\nabla f\|_{L^2}^2}{\|f\|_{L^2}^2};\ f \in C_0(\Omega) \right\}.$$

Remarque 2.3.6. *Supposons que Γ est un graphe vérifiant* (DV). *On peut alors vérifier facilement que* (UE) *est équivalent à*

$$p_{l-1}(x,y) \leq \frac{C}{V(y,\sqrt{l})} \exp\left(-c\frac{d^2(x,y)}{l}\right) \tag{2.8}$$

ou

$$p_{l-1}(x,y) \leq \frac{C}{V(x,\sqrt{l})} \exp\left(-c\frac{d^2(x,y)}{l}\right). \tag{2.9}$$

Nous avons établi des estimations sur les différences “temporelles” de p_l (les estimations pour les différences d'ordre 1 ont été montrées pour la première fois par Christ dans [Chr95] mais une preuve plus simple est donnée par Dungey dans [Dun06] ; nous avons étendu ce résultat aux différences d'ordre supérieur).

Théorème 2.3.7. *Soit* (Γ,μ) *un graphe pondéré. Supposons que* Γ *satisfasse* (DV), (LB) *et* (DUE). *On définit $D(1)$ comme l'opérateur suivant agissant sur les suites :*

$$(D(1)u)_l = u_l - u_{l+1}.$$

Alors, pour tout $j \geq 0$, il existe deux constantes $C_j, c_j > 0$ telles que, pour tout $l \in \mathbb{N}^*$ et tous $x, y \in \Gamma$,

$$|(D(1)^j p)_l(x,y)| \leq \frac{C_j}{l^j V(x,\sqrt{l})} \exp\left(-c_j\frac{d^2(x,y)}{l}\right). \tag{TDUE}$$

L'estimation (TDUE) permet de déduire les estimations L^1-L^2 suivantes :

Théorème 2.3.8. *Soit* (Γ,μ) *un graphe pondéré satisfaisant les hypothèses* (DV), (LB) *et* (DUE). *L'estimation de Gaffney L^1-L^2 suivante est vérifiée : pour tout $j \in \mathbb{N}$, il existe $c, C > 0$ tels que pour tous $E, F \subset \Gamma$, tout $x_0 \in \Gamma$, tout $l \in \mathbb{N}^*$ satisfaisant l'une des conditions suivantes*

(i) $\sup\{d(x_0,y),\ y \in F\} \leq 3d(E,F)$,

(ii) $\sup\{d(x_0,y),\ y \in F\} \leq \sqrt{l}$,

(iii) $\sup\{d(x_0,x),\ x \in E\} \leq 3d(E,F)$,

(iv) $\sup\{d(x_0,x),\ x \in E\} \leq \sqrt{l}$,

et toute fonction f à support dans F, on a

$$\|(I-P)^j P^l f\|_{L^2(E)} \leq \frac{C}{l^j} \frac{1}{V(x_0,\sqrt{l})^{\frac{1}{2}}} e^{-c\frac{d(E,F)^2}{l}} \|f\|_{L^1(F)} \tag{GT_2}$$

et

$$\|\nabla(I-P)^j P^l f\|_{L^2(E)} \leq \frac{C}{l^{j+\frac{1}{2}}} \frac{1}{V(x_0,\sqrt{l})^{\frac{1}{2}}} e^{-c\frac{d(E,F)^2}{l}} \|f\|_{L^1(F)}. \tag{GGT_2}$$

Remarque 2.3.9. *Le théorème précédent va être classiquement utilisé pour*

$$(E,F) \in \{(B, C_j(B)),\ B \text{ boule },\ j \geq 1\} \cup \{(C_j(B), B),\ B \text{ boule },\ j \geq 1\}.$$

2.4 Hypothèses pour le cas $p > 2$

Dans ce paragraphe, nous introduisons les hypothèses que nous considérons comme fortes. Elles ne seront utilisées dans ce mémoire que pour avoir des résultats de continuité L^p lorsque $p > 2$ des fonctionnelles de Littlewood-Paley verticales.

Présentons d'abord les inégalités de Poincaré :

Définition 2.4.1 (Inégalité de Poincaré sur les boules)**.** *Soit $s \in [1, +\infty)$. Le graphe pondéré (Γ, μ) satisfait l'inégalité de Poincaré (P_s) s'il existe $C > 0$ et $b \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $x \in \Gamma$, tout $r > 0$ et toute fonction f sur Γ*

$$\frac{1}{V(x,r)} \sum_{y \in B(x,r)} |f(y) - f_B|^s m(y) \leq C \frac{r^s}{V(x, r+b)} \sum_{y \in B(x, r+b)} |\nabla f(y)|^s m(y), \tag{P_s}$$

où

$$f_B = \frac{1}{V(B)} \sum_{x \in B} f(x) m(x). \tag{2.10}$$

Remarque 2.4.2. *Dans [HK00], on peut trouver la preuve du fait que la propriété (P_{s_1}) implique (P_{s_2}) si $s_1 \leq s_2$. De plus ([KZ08, Theorem 1.0.1]), si le graphe vérifie la propriété de doublement* (DV)*, alors l'ensemble $\{s \in [1, +\infty], \ \Gamma \text{ vérifie } (P_s)\}$ est ouvert.*

Remarque 2.4.3. *Soit (Γ, μ) un graphe. Soient $s \in [1, +\infty]$, $a \geq 1$ et $b \in \mathbb{N}$. On introduit une variante de de (P_s) : on dit que $(\mathrm{P}_s^{a,b})$ est satisfaite si, et seulement si, il existe $C > 0$ tel que pour tout $x \in \Gamma$, tout $r > 0$ et toute fonction f sur Γ*

$$\frac{1}{V(x,r)} \sum_{y \in B(x,r)} |f(y) - f_B|^s m(y) \leq C \frac{r^s}{V(x, ar+b)} \sum_{y \in B(x, ar+b)} |\nabla f(y)|^s m(y), \tag{$\mathrm{P}_s^{a,b}$}$$

Soit X un espace géodésique muni d'une mesure doublante μ. On suppose qu'on a une inégalité de Poincaré de la forme suivante : il existe $\lambda \geq 1$ tel que, pour toute boule $B \subset X$, toute fonction $u : X \to \mathbb{R}$ intégrable sur les boules de X et tout gradient supérieur ρ de u dans X,

$$\frac{1}{\mu(B)} \int_B |u(x) - u_B|^p \, d\mu(x) \lesssim \textit{diam } B \left(\frac{1}{\mu(\lambda B)} \int_{\lambda B} \rho^p(x) d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Alors ([HKST15, Remark 9.1.19], voir aussi [HK95] et [HK00, Corollary 9.8]) cette inégalité s'améliore en :

$$\frac{1}{\mu(B)} \int_B |u(x) - u_B|^p \, d\mu(x) \lesssim \textit{diam } B \left(\frac{1}{\mu(B)} \int_{B} \rho^p(x) d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}},$$

pour toute boule $B \subset X$, toute fonction $u : X \to \mathbb{R}$ intégrable sur les boules de X et tout gradient supérieur ρ de u dans X. Les arguments de [HK00, HK95, HKST15] ne semblent pas inclure le cas des graphes. Cependant, les preuves de [HK95] peuvent être adaptées pour montrer les résultats suivants :

(i) Soit (Γ, μ) satisfaisant (DV) *et* (LB_2) *et $s \in [1, +\infty]$. Alors, pour tous $a \geq 1$ et $b \in \mathbb{N}$, l'hypothèse $(\mathrm{P}_s^{a,b})$ est équivalente à $(P_s^{1,0})$.*

(ii) Soit (Γ,μ) *satisfaisant* (DV) *et* (LB) *et* $s \in [1,+\infty]$. *Alors, pour tous* $a \geq 1$ *et* $b \in \mathbb{N}$, *il existe* $b' \in \mathbb{N}$ *tel que l'hypothèse* $(\mathrm{P}_s^{a,b})$ *est équivalente à* $(P_s^{1,b'})$.

La conjonction des inégalités de Poincaré et de (DV) implique en particulier les estimations supérieures gaussiennes du noyau de Markov comme l'ont montré Coulhon et Grigor'yan (cf [CG98, Proposition 2.3]). En même temps, Delmotte a montré dans [Del99] que l'inégalité de Poincaré L^2 était liée à la conjonctions des estimations supérieures et inférieures du noyau de Markov :

Théorème 2.4.4. *Soit* Γ *un graphe. Les assertions suivantes sont équivalentes*

(i) Γ *satisfait les hypothèses* (LB_2), (DV) *et* (P_2),

(ii) il existe $C, c > 0$ *telles que le noyau* p_l *vérifie les estimations ponctuelles supérieures et inférieures, i.e.*

$$\frac{c}{V(x,\sqrt{l})}\exp\left(-C\frac{d^2(x,y)}{l}\right) \leq p_{l-1}(x,y) \leq \frac{C}{V(x,\sqrt{l})}\exp\left(-c\frac{d^2(x,y)}{l}\right)$$

dès que $d(x,y) < l$.

Remarque 2.4.5. *En réalité, Delmotte a montré dans [Del99] que (i) et (ii) sont aussi équivalentes à une inégalité de Harnack parabolique.*

Il a aussi donné des estimations sur le noyau du semi-groupe engendré par Δ *similaires à celles trouvées dans [Pan93].*

La deuxième hypothèse est une borne L^p uniforme sur les opérateurs $\sqrt{l}\nabla P^l$.

Définition 2.4.6. *Soit* $p \in [1,+\infty]$. *On dit que le graphe pondéré* (Γ,μ) *vérifie* (GG_p) *si*

$$\|\nabla P^l f\|_{L^p} \leq \frac{C_p}{\sqrt{l}}\|f\|_{L^p} \qquad \forall l \in \mathbb{N}^*,\, \forall f \in L^p(\Gamma). \tag{GG_p}$$

Remarque 2.4.7. *Notons que les hypothèses* (P_1) *et* (GG_∞) *sont satisfaites dès lors que* Γ *est le graphe de Cayley d'un groupe de type fini. En effet l'hypothèse* (P_1) *est prouvée dans [HK00, Proposition 12.3] et* (GG_∞) *est une conséquence des estimations*

$$\nabla_x p_l(x,y) \lesssim \left(\frac{1}{lV(x,\sqrt{l})V(y,\sqrt{l})}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-c\frac{d^2(x,y)}{l}\right)$$

prouvées dans [HSC93, Theorem 5.1] (dans le cas d'une croissance polynomiale du volume).

Néanmoins, ces hypothèses ne sont pas vérifiées en toute généralité. Par exemple, si $d \geq 2$, *le graphe* Γ_d *constitué de deux copies de* $\mathbb{Z}^d$ *reliées par une arête ne vérifie pas* (P_s) *pour* $s \leq d$.
De plus l'hypothèse (GG_p) *n'est pas vérifiée pour* Γ_2 *si* $p > 2$. *En effet, supposons par l'absurde que* (GG_q) *est vérifiée sur* Γ_2 *pour un* $q > 2$. *On peut vérifier aussi que, comme* $q > 2$, (P_q) *est aussi satisfaite. L'argument de Bernicot, Coulhon et Frey [BCF14, Theorem 1.1] montre que, dans un espace de Dirichlet doublant muni d'un carré au champ, la combinaison de* (GG_q) *et* (P_q) *implique la majoration et la minoration gaussienne*

du noyau du semi-groupe de la chaleur. Cet argument doit pouvoir s'adapter au cas des graphes, ce qui entraîne

$$\frac{1}{V(x,\sqrt{k})}e^{-C\frac{d^2(x,y)}{k}} \lesssim p_{k-1}^{\Gamma_2}(x,y) \lesssim \frac{1}{V(x,\sqrt{k})}e^{-c\frac{d^2(x,y)}{k}} \qquad \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall x,y \in \Gamma. \tag{2.11}$$

Par le Théorème 2.4.4, (2.11) *implique que (P_2) est vraie sur Γ_2, ce qui est faux.*

Remarque 2.4.8. *Dungey a prouvé dans [Dun08] que* (GG_p) *était vérifiée dès lors que $p \in (1,2]$ et Γ vérifie* (LB) *et* (LDV)*. Nous retrouverons ce résultat dans le Corollaire 2.5.4 plus bas.*

2.5 Résultats sur la continuité L^p des fonctionnelles de Littlewood-Paley

Pour tout $\beta > 0$, toute fonction f sur Γ et tout sommet $x \in \Gamma$, définissons la fonctionnelle

$$g_\beta^d f(x) = \left(\sum_{l\geq 1} l^{2\beta-1}\left|(I-P)^\beta P^{l-1}f(x)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

De même, pour tout $\beta > -\frac{1}{2}$, toute fonction f sur Γ et tout sommet $x \in \Gamma$, on définit

$$\tilde{g}_\beta^d f(x) = \left(\sum_{l\geq 1} l^{2\beta}\left|\nabla(I-P)^\beta P^{l-1}f(x)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Théorème 2.5.1. *Soit (Γ,μ) un graphe pondéré satisfaisant* (DV), (LB) *et* (DUE)*. Alors :*

1. *pour tout $\beta > 0$, g_β^d est de type $(1,1)$ faible, ce qui signifie qu'il existe $C > 0$ telle que, pour tout $\lambda > 0$,*

   $$m\left(\left\{x \in \Gamma;\ g_\beta^d f(x) > \lambda\right\}\right) \leq \frac{C}{\lambda}\|f\|_{L^1(\Gamma)},$$

   et (fortement) continue sur $L^p(\Gamma)$ pour tout $1 < p < +\infty$, i.e. il existe une constante $C > 0$ telle que

   $$\|g_\beta^d f\|_{L^p} \leq C\|f\|_{L^p} \qquad \forall f \in L^p(\Gamma) \cap L^2(\Gamma).$$

2. *Pour tout $\beta > -\frac{1}{2}$, $\tilde{g}_\beta^d$ est de type $(1,1)$ faible, et fortement continue sur $L^p(\Gamma)$ pour tout $1 < p \leq 2$. Si (Γ,μ) satisfait en plus (P_2) et (GG_q) pour un $q > 2$, alors $\tilde{g}_\beta$ est fortement continue sur $L^p(\Gamma)$ pour tout $p \in (2,q)$.*
3. *Pour tout $1 < p < +\infty$,*

   $$\|f\|_{L^p} \leq C\|g_\beta^d f\|_{L^p} \qquad \forall f \in L^p(\Gamma) \cap L^2(\Gamma),$$

   pour tout $2 \leq p < +\infty$

   $$\|f\|_{L^p} \leq C\|\tilde{g}_\beta^d f\|_{L^p} \qquad \forall f \in L^p(\Gamma) \cap L^2(\Gamma)$$

   et si (P_2) et (GG_q) sont satisfaites pour un $q > 2$, alors pour tout $p \in (q',2)$ (avec $\frac{1}{q'}+\frac{1}{q}=1$),

   $$\|f\|_{L^p} \leq C\|\tilde{g}_\beta^d f\|_{L^p} \qquad \forall f \in L^p(\Gamma) \cap L^2(\Gamma).$$

Remarque 2.5.2. *L'intervalle* $\beta > -\frac{1}{2}$ *pour la continuité* L^p *de* $\tilde{g}^d_\beta$ *est lié à la présence de* ∇ *dans la définition de* $\tilde{g}^d_\beta$. *Pour s'en convaincre, remarquons que l'égalité* (2.6) *implique que l'on a, pour tout* $f \in L^2(\Gamma)$, $\|\tilde{g}^d_\beta f\|_{L^2} = \|g^d_{\beta+\frac{1}{2}} f\|_{L^2}$.

Notre second résultat porte sur la continuité L^p de la fonctionnelle $\tilde{g}^d_0$ sous des hypothèses très faibles sur Γ :

Théorème 2.5.3. *Soit* (Γ, μ) *un graphe satisfaisant* (LB) *et* (LDV). *Alors* $\tilde{g}^d_0$ *est bornée sur* L^p *pour tout* $p \in (1, 2]$.

Corollaire 2.5.4. *Soit* (Γ, μ) *un graphe satisfaisant* (LB) *et* (LDV). *Alors* (GG_p), *c'est-à-dire*

$$\|\nabla P^{l-1} f\|_{L^p} \lesssim \frac{1}{\sqrt{l}} \|f\|_{L^p} \qquad \forall l \in \mathbb{N}^*$$

est vérifiée pour tout $p \in (1, 2]$.

Remarque 2.5.5.
1. *La continuité* L^p *de* g^d_1 *a été prouvée dans [BR09, Theorem 1.16]. Le Théorème 2.5.1 étend ce résultat à une version fractionnaire de* g^d_1. *De plus, nous prouvons une continuité similaire pour* $\tilde{g}^d_\beta$ *et établissons les inégalités réciproques.*
2. *La continuité* L^p *de* g^d_β *peut être déduite des résultats de [ALM14]. En effet, comme* g_1 *est continue sur* L^p *pour tout* $p \in (1, +\infty)$ *par [BR09, Theorem 1.16], [ALM14, Theorem 3.1] entraîne que* P *est un opérateur de R-Ritt, et le fait que* g^d_β *est continue sur* L^p *pour tout* $p \in (1, +\infty)$ *est alors une conséquence de [ALM14, Theorem 3.3]. Cependant, ces arguments ne montrent pas que* g^d_β *est de type* $(1, 1)$ *faible. De plus, ils ne donnent aucun résultat concernant* $\tilde{g}^d_\beta$.

2.6 Théorèmes sur les opérateurs de Calderón-Zygmund "sans noyau" et leurs conséquences.

Nous allons commencer par nous intéresser à la preuve du Théorème 2.5.1. La preuve s'inspire de celle de [BR09, Theorem 1.16].

Un opérateur sous-linéaire T est dit de type (p, p) faible s'il existe $C > 0$ tel que pour tout $\lambda > 0$ et toute fonction $f \in L^p$,

$$m\left(\{x \in \Gamma;\ |Tf(x)| > \lambda\}\right) \leq \frac{C}{\lambda^p} \|f\|^p_{L^p(\Gamma)}.$$

Pour monter la continuité L^p des opérateurs g^d_β et $\tilde{g}^d_\beta$, nous allons utiliser les théorèmes suivants, qui portent sur la continuité L^p d'opérateurs de Calderón-Zygmund "sans noyaux" ([BR09, Theorems 1.14 et 1.17] et [Aus07, Theorems 1.1 et 1.2]).

Le premier théorème concerne le cas $p < 2$. Il est dû à Blunck et Kunstmann (cf [BK03, Theorem 1.1]) généralisant un travail plus ancien de Duong et Mc Intosh (cf [DMI99, Theorem 1]).

Théorème 2.6.1. *Soit* $p_0 \in [1, 2)$. *Supposons que* Γ *satisfasse la propriété de doublement* (DV) *et prenons* T *un opérateur sous-linéaire continu sur* $L^2(\Gamma)$.

Pour chaque boule B, *soit* A_B *un opérateur linéaire agissant sur* $L^2(\Gamma)$.

Supposons encore que pour tout $j \geq 1$, il existe $\varphi(j) > 0$ tel que, pour toute boule $B \subset \Gamma$ et toute fonction f à support dans B, on ait

$$\frac{1}{V(2^{j+1}B)^{\frac{1}{2}}} \|T(I - A_B)f\|_{L^2(C_j(B))} \leq \varphi(j) \frac{1}{V(B)^{\frac{1}{p_0}}} \|f\|_{L^{p_0}} \tag{2.12}$$

pour tout $j \geq 2$ et

$$\frac{1}{V(2^{j+1}B)^{\frac{1}{2}}} \|A_B f\|_{L^2(C_j(B))} \leq \varphi(j) \frac{1}{V(B)^{\frac{1}{p_0}}} \|f\|_{L^{p_0}}. \tag{2.13}$$

pour tout $j \geq 1$.

Si $\sum_{j\geq 1} \varphi(j) 2^{jd} < +\infty$, avec un d vérifiant (2.7), alors T est de type (p_0, p_0) faible, et donc continu sur L^p pour tout $p \in (p_0, 2]$.

Le deuxième résultat traite le cas $p > 2$. Il est dû à Auscher, Coulhon, Duong et Hofmann (cf [ACDH04, Theorem 2.1]).

Théorème 2.6.2. *Soit $p_0 \in (2, +\infty]$. Supposons que Γ satisfasse la propriété de doublement* (DV) *et que T soit un opérateur sous-linéaire continu sur $L^2(\Gamma)$.*

Pour chaque boule B, soit A_B un opérateur linéaire agissant sur $L^2(\Gamma)$.

Supposons ensuite qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toute fonction $f \in L^2(\Gamma)$, tout $x \in \Gamma$ et toute boule $B \ni x$, on ait

$$\frac{1}{V(B)^{\frac{1}{2}}} \|T(I - A_B)f\|_{L^2(B)} \leq C \left(\mathcal{M}|f|^2(x)\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.14}$$

et

$$\frac{1}{V(B)^{\frac{1}{p_0}}} \|TA_B f\|_{L^{p_0}(B)} \leq C \left(\mathcal{M}|Tf|^2(x)\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.15}$$

Alors, pour tout $p \in (2, p_0)$, T est continu sur $L^p(\Gamma)$.

Lorsque l'on suppose les estimations gaussiennes ponctuelles (UE), on choisit $I - A_B = (I - P^{r^2})^M$ avec r le rayon de la boule B et $M \in \mathbb{N}^*$ fixé. On va vérifier que les hypothèses des théorèmes 2.6.1 et 2.6.2 sont satisfaites avec $T = g^d_\beta$ et $T = \tilde{g}^d_\beta$.

(a) L'estimation (2.13) est alors une conséquence des estimations (GT_2).

(b) Les estimations (2.12) et (2.14) sont obtenues en utilisant judicieusement les estimations (GT_2) (pour g^d_β) et (GGT_2) (pour $\tilde{g}^d_\beta$). La principale difficulté, que n'avaient pas rencontrée Badr et Russ dans [BR09], est la présence d'une puissance non entière du laplacien dans la définition de g^d_β et $\tilde{g}^d_\beta$ lorsque $\beta \notin \mathbb{N}$. On surmonte ce problème en travaillant sur les espaces de suites pour pouvoir obtenir des inégalités de Hölder inverses (voir paragraphe 2.7).

(c) L'estimation (2.15) pour g^d_β est basée sur les estimations ponctuelles gaussiennes (UE). En particulier, elle n'utilise ni (P_2) ni (GG_q).

(d) L'estimation (2.15) pour $\tilde{g}^d_\beta$ nécessite les hypothèses (P_2) et (GG_q) pour un $q > p_0$. En effet, la combinaison de (UE) et (GG_q) nous permet de montrer qu'il existe $C, c > 0$ tels que pour toute boule B de rayon r, tout $j \in \mathbb{N}^*$ et toute fonction f à support dans $C_j(B)$, on a

$$\frac{1}{V(B)^{\frac{1}{p}}} \|\nabla P^{2r^2} f\|_{L^p(B)} \leq \frac{Ce^{-c4^j}}{k} \frac{1}{V(2^j B)} \|f\|_{L^2(C_j(B))}.$$

C'est une estimation L^2-L^p, qui présente des similitudes avec l'estimation L^1-L^2 (GGT_2) utilisée dans le cas $p < 2$.

On conclut la preuve de (2.15) en utilisant l'inégalité de Poincaré (P_2).

Nous pouvons constater que la méthode repose de manière importante sur les estimations (GT_2) et (GGT_2). La plus grande difficulté vient de (GGT_2) qui généralise l'estimation suivante de [Rus00, Lemma 7] établissant :

$$\sum_{y\in B} |\nabla_y p_l(y,x)|^2 e^{c\frac{d^2(x,y)}{l}} m(y) \leq \frac{C}{lV(x,\sqrt{l})} \forall l \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \Gamma$$

pour un $c > 0$ suffisamment petit. Pour la preuve de (GGT_2), on procède par intégration par parties et on utilise les estimations ponctuelles sur les différences "temporelles" du noyau données par le Théorème 2.3.7.

Pour montrer les inégalités inverses, nous avons montré que si (Γ,μ) satisfait (LB), il existe une fonctionnelle h^d_β telle que

(i) pour tout $\beta > 0$,

$$\|\tilde{g}^d_{\beta-\frac{1}{2}} f\|_{L^2} = \|g^d_\beta f\|_{L^2} \simeq \|h^d_\beta f\|_{L^2} \qquad \forall f \in L^2(\Gamma),$$

(ii) h_β est une isométrie sur L^2, c'est à dire, pour toute $f \in L^2(\Gamma)$,

$$\|h_\beta f\|_{L^2(\Gamma)} = \|f\|_{L^2(\Gamma)}.$$

Les estimations inférieures se déduisent alors des estimations supérieures par dualité.

2.7 Inégalités de Hölder inverses pour les suites

Soit $(\lambda_l)_{l\geq 1}$ une suite positive. Il est immédiat de vérifier que l'inégalité suivante

$$\left(\sum_{l\in\mathbb{N}^*} \lambda_l |u_l|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \sum_{l\in\mathbb{N}^*} \lambda_l |u_l| \qquad \forall (u_l)_l \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$$

est satisfaite si et seulement si $\lambda_l \geq 1$ pour tout $l \geq 1$.

Par conséquent, si $M > 0$, l'inégalité

$$\left(\sum_{l\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{l} |u_l|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq M^{\frac{1}{2}} \sum_{l\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{l} |u_l| < +\infty$$

n'est satisfaite que sur un sous-ensemble E_M strictement inclus dans l'espace des suites $(u_l)_{l\geq 1}$ telles que $\sum_{l\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{l}|u_l| < +\infty$.

Par exemple, on veut établir (2.12) pour l'opérateur $g^d_{\frac{1}{2}}$ et $I - A_B = (I - P^{r^2})$, où r est le rayon de la boule B. L'inégalité de Minkowski généralisée entraîne que, si f est à support dans B,

$$\|g_{\frac{1}{2}}(I - P^{r^2})f\|_{L^2(C_j(B))} \leq \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\sum_{l\geq 1} \|(I-P)P^{k+l-1}(I-P^{r^2})f\|^2_{L^2(C_j(B))}\right)^{\frac{1}{2}},$$

où $\sum a_k z^k$ est la série de Taylor de la fonction $(1-z)^{-\frac{1}{2}}$. En utilisant (DV) et les estimations (GT_2), on en déduit que

$$\frac{1}{V(2^jB)^{\frac{1}{2}}}\|g_{\frac{1}{2}}(I-P^{r^2})f\|_{L^2(C_j(B))} \lesssim \frac{\|f\|_{L^1}}{V(2^jB)}\sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\sum_{l\geq 1}\left[r^2 \sup_{s\in[0,r^2]}\left\{\frac{\exp(-c\frac{4^jr^2}{l+k+s})}{(l+k+s)^2}\right\}\right]^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.16}$$

La majoration

$$\left(\sum_{l\geq 1}\left[r^2 \sup_{s\in[0,r^2]}\left\{\frac{\exp(-c\frac{4^jr^2}{l+k+s})}{(l+k+s)^2}\right\}\right]^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \sum_{l\geq 1} r^2 \sup_{s\in[0,r^2]}\left\{\frac{\exp(-c\frac{4^jr^2}{l+k+s})}{(l+k+s)^2}\right\}$$

n'est pas assez fine pour nous donner l'estimation souhaitée. Nous avons donc montré que l'ensemble des suites

$$\mathcal{A} = \{(u_l^{k,d})_{l\in\mathbb{N}^*},\, d>0, k\in\mathbb{N}, r\in\mathbb{N}\}$$

où

$$a_l^{k,d} = l^{\frac{1}{2}} \sup_{s\in[0,r^2]}\left\{\frac{\exp\left(-\frac{dr^2}{l+k+s}\right)}{(l+k+s)^2}\right\}$$

est inclus dans un E_M pour un M assez grand.
Par conséquent, nous avons la majoration

$$\left(\sum_{l\geq 1}\left[r^2 \sup_{s\in[0,r^2]}\left\{\frac{\exp(-c\frac{4^jr^2}{l+k+s})}{(l+k+s)^2}\right\}\right]^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq M\sum_{l\geq 1} \frac{r^2}{\sqrt{l}} \sup_{s\in[0,r^2]}\left\{\frac{\exp(-c\frac{4^jr^2}{l+k+s})}{(l+k+s)^2}\right\},$$

et donc (2.16) devient

$$\begin{aligned}\frac{1}{V(2^jB)^{\frac{1}{2}}}\|g_{\frac{1}{2}}(I-P^{r^2})\|_{L^2(C_j(B))} &\lesssim \frac{\|f\|_{L^1}}{V(2^jB)}\sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{l\geq 1}\frac{r^2}{\sqrt{l}} \sup_{s\in[0,r^2]}\left\{\frac{\exp(-c\frac{4^jr^2}{l+k+s})}{(l+k+s)^2}\right\}\\ &\lesssim \frac{\|f\|_{L^1}}{V(2^jB)}\sum_{m=0}^{\infty} r^2 \sup_{s\in[0,r^2]}\left\{\frac{\exp(-c\frac{4^jr^2}{m+s})}{(m+s)^2}\right\}\sum_{k\geq 0}^{m-1}\frac{a_k}{\sqrt{m-k}}.\end{aligned} \tag{2.17}$$

On remarque ensuite que $a_k \simeq (k+1)^{-\frac{1}{2}}$ (cf Lemma A.6.1) puis en utilisant les sommes de Riemann (cf p. 81)

$$\sum_{k\geq 0}^{m-1}\frac{a_k}{\sqrt{m-k}} \lesssim \int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}dt < +\infty.$$

La majoration (2.17) nous donne alors

$$\frac{1}{V(2^jB)^{\frac{1}{2}}}\|g_{\frac{1}{2}}(I-P^{r^2})\|_{L^2(C_j(B))} \lesssim \frac{\|f\|_{L^1}}{V(2^jB)}\sum_{m=0}^{\infty} r^2 \sup_{s\in[0,r^2]}\left\{\frac{\exp(-c\frac{4^jr^2}{m+s})}{(m+s)^2}\right\},$$

qui s'estime par $\frac{4^{-j}}{V(2^jB)}\|f\|_{L^1}$ (cf p. 81 pour le calcul).

Pour montrer que $\mathcal{A} \subset E_M$ pour un M assez grand, nous avons exhibé un ensemble $\tilde{E}_M$ inclus dans E_M, qui est stable par le "shift" à gauche (généralisé) et par passage à la borne supérieure, pour pouvoir nous restreindre à montrer que

$$\mathcal{A}_0 = \{(v_l^d)_{l\in\mathbb{N}^*},\, d > 0\}$$

où

$$v_l^d = l^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{d}{l}\right)$$

est inclus dans un $\tilde{E}_M$ pour un M assez grand.

2.8 Méthode de Stein pour la continuité de $\tilde{g}_0$

Dans ce paragraphe, nous présentons l'idée de la preuve de la continuité L^p de $\tilde{g}_0$. Par analogie, nous expliquerons d'abord la démarche dans le cadre de $\mathbb{R}^d$, puis nous présenterons les difficultés particulières aux graphes.

La méthode de Stein consiste à remarquer que l'on a si $q > 1$ et $f > 0$ est une fonction régulière définie sur $\mathbb{R}^d$, on a (cf [Ste70b, Chapter 2, Paragraph 2, Lemma 2])

$$q(q-1)f^{q-2}|\nabla f|^2 = -qf^{q-1}\Delta f + \Delta(f^q),$$

et donc

$$q(q-1)|\nabla f|^2 = -qf\Delta f + f^{2-q}\Delta(f^q).$$

Ainsi, si $u_t(x) = u(t,x)$ est défini sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d$, on a

$$q(q-1)|\nabla u_t|^2 = -qu_t[\partial_t + \Delta]u_t + (u_t)^{2-q}[\partial_t + \Delta](u_t^q)$$

et donc si $u_t(x) = e^{-t\Delta}f$ est solution de l'équation de la chaleur, alors $\partial_t u + \Delta u = 0$, et on obtient

$$q(q-1)|\nabla u_t|^2 = u_t^{2-q}[\partial_t + \Delta](u_t^q) := N_q(u_t) \tag{2.18}$$

Ensuite, on peut montrer (cf [CDL03, Theorem 1.2], basé sur la preuve de [Ste70b, Chapter 2, Paragraph 2, Theorem 2]), que

$$\begin{aligned}\tilde{g}_0 f &:= \left(\int_0^\infty |\nabla e^{-t\Delta}f|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\simeq \left(\int_0^\infty N_q(e^{-t\Delta}f)dt\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

est continue sur $L^q(G)$.

Remarque 2.8.1. *La méthode ne s'adapte pas pour montrer la continuité de $\tilde{g}_\beta$ pour $\beta \neq 0$.*

Nous allons présenter ici un calcul similaire à celui de [Ste70b, Chapter 2, Paragraph 2, Theorem 2] (et nouveau) qui va nous donner le résultat suivant :

Proposition 2.8.2. *Pour tout $q \in (1,2]$, il existe $C > 0$ tel que pour tout $E \subset \mathbb{R}^d$ et toute fonction positive $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, on a*

$$\|\nabla e^{-t\Delta} f\|_{L^q(E)} \le C \|e^{-t\Delta} f\|_{L^q(E)}^{1-\frac{q}{2}} \|\Delta e^{-t\Delta} f\|_{L^q}^{\frac{1}{2}} \|e^{-t\Delta} f\|_{L^q}^{\frac{q-1}{2}} \qquad \forall t > 0.$$

Corollaire 2.8.3. *Pour tout $q \in (1,2)$, il existe $C, c > 0$ tels que pour tous $E, F \subset \mathbb{R}^d$ et toute fonction f à support dans F, on a*

$$\|\nabla e^{-t\Delta} f\|_{L^q(E)} \le \frac{C}{t} \exp\left(-c\frac{d(E,F)^2}{t}\right) \|f\|_{L^q(F)} \qquad \forall t > 0.$$

Remarque 2.8.4. *Le plus simple pour prouver le Corollaire 2.8.3 d'utiliser l'expression explicite du noyau de la chaleur dans $\mathbb{R}^d$ donnée en (1.1). La démarche (montrer le Corollaire 2.8.3 à l'aide de la Proposition 2.8.2) utilisant le pseudo-gradient N_q est néanmoins susceptible de se généraliser à des contextes non euclidien. L'important est de remarquer que, par la Proposition 2.8.2, on peut déduire des estimations de type Gaffney L^p, $p \in (1,2)$ sur le gradient du semigroupe dès lors que l'on en a sur le semi-groupe lui même.*

Démonstration: (Corollaire)

D'abord, remarquons que l'on peut supposer sans perte de généralité que f est positive (en écrivant $f = f^+ - f^-$) et dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ (par densité de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$, $p \in (1,2]$). La démonstration du corollaire est alors une conséquence immédiate de la proposition et les estimations de Gaffney (1.14) sur le semi-groupe $e^{-t\Delta}$ (qui peuvent être déduites de l'expression du noyau de la chaleur h_t donnée en (1.1)). $\square$

Démonstration: (Proposition)

Notons u_t pour $e^{-t\Delta} f$. L'égalité (2.18) implique

$$\begin{aligned}
\|\nabla u_t\|_{L^q(E)}^q &\lesssim \int_E [N_q(u_t)(x)]^{\frac{q}{2}} dx \\
&= \int_E [u_t(x)]^{\frac{q(2-q)}{2}} [(\partial_t + \Delta)[u_t^q](x)]^{\frac{q}{2}} dx \\
&\le \left(\int_E [u_t(x)]^{\frac{qp(2-q)}{2}} dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E [(\partial_t + \Delta)[u_t^q](x)]^{\frac{qp'}{2}} dx\right)^{\frac{1}{p'}}
\end{aligned}$$

où la dernière ligne est une conséquence de l'inégalité de Hölder (et du fait que $(\partial_t + \Delta)[u_t^q](x) \ge 0$ pour tout $x \in \Gamma$, $t > 0$). On choisit p' tel que $\frac{qp'}{2} = 1$. On a alors $p' = \frac{2}{q}$, $\frac{1}{p} = 1 - \frac{q}{2}$ et $p = \frac{2}{2-q}$. D'où

$$\|\nabla u_t\|_{L^q(E)}^q \lesssim \|u_t\|_{L^q(E)}^{q(1-\frac{q}{2})} \left(\int_E (\partial_t + \Delta)[u_t^q](x) dx\right)^{\frac{q}{2}}. \tag{2.19}$$

Il nous reste à estimer $\int_E (\partial_t + \Delta)[u_t^q](x) dx$. Comme $(\partial_t + \Delta)[u_t^q] \ge 0$, il vient

$$\begin{aligned}
\int_E (\partial_t + \Delta) u_t^q(x) dx &\le \int_{\mathbb{R}^d} (\partial_t + \Delta) u_t^q(x) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \partial_t u_t^q(x) dx \\
&= q \int_{\mathbb{R}^d} u_t^{q-1}(x) \partial_t u_t(x) dx.
\end{aligned}$$

Précisons que la deuxième ligne provient du fait que $\int_G \Delta h dx = 0$ dès lors que Δh est intégrable, ce qui est le cas car $h = u_t^q \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dès lors que $t > 0$. Ceci nous donne, en utilisant l'inégalité de Hölder,

$$\int_E (\partial_t + \Delta) u_t^q(x) dx \leq \|u_t\|_{L^q}^{q-1} \|\partial_t u_t\|_{L^q}. \tag{2.20}$$

La combinaison de (2.19) et (2.20) conclut la preuve de la proposition. □

Un pseudo-gradient N_q a été utilisé pour montrer la continuité L^q ($q \in (1, 2]$) des fonctionnelles de Littlewood-Paley verticales dans des contextes différents du cadre euclidien (cf [CDL03], [Dun08] ou encore le Théorème 2.2.8 de ce mémoire). Dans [CDL03, Theorem 1.2], Coulhon, Duong et Li ont montré la continuité de $\tilde{g}_0$ (cas des variété riemanniennes). Dungey ([Dun08, Theorem 1.1]) a quant à lui prouvé la continuité L^q, $q \in (1, 2]$, de la fonctionnelle $\tilde{g}_0$ (faisant intervenir le semi-groupe engendré par le laplacien discret) dans le cas des graphes. Le Théorème 2.2.8 prouvé dans ce mémoire énonce la continuité de la fonctionnelle $\tilde{g}_0^d$ lorsque l'espace est un graphe.

Pour montrer le Théorème 2.2.8, nous avons utilisé le pseudo-gradient suivant

$$N_q(u_l) = u_l^{2-q} [\partial_l + \Delta](u_l^q) \tag{2.21}$$

où $u_l = P^l f$ et $\partial_l v_l = v_{l+1} - v_l$.

La principale difficulté revient alors à montrer la majoration de $|\nabla u_l|^2$ par $N_q(u_l)$, ou plus exactement la majoration

$$|\nabla u_l(x)|^2 \lesssim \sum_{y \sim x} N_q(u_l)(y). \tag{2.22}$$

Chaque discrétisation (en temps et en espace) apporte une difficulté supplémentaire, traitée grâce à la formule de Taylor avec reste intégral et un argument de convexité.

Comme corollaire, nous avons alors le résultat suivant :

Proposition 2.8.5. *Soit (Γ, μ) un graphe. Alors pour tout $q \in (1, 2]$, il existe $C > 0$ tel que pour tout $E, F \subset \Gamma$ et toute fonction positive $f \in L^\infty(\Gamma)$ à support dans F, on a*

$$\|\nabla P^k f\|_{L^q(E)} \leq C \|P^k f\|_{L^q(E)}^{1-\frac{q}{2}} \|\Delta P^k f\|_{L^q}^{\frac{1}{2}} \|P^k f\|_{L^q}^{\frac{q-1}{2}} \qquad \forall t > 0.$$

Chapitre 3

Espaces de Hardy sur les graphes et transformée de Riesz

Dans ce chapitre, nous allons présenter les résultats obtenus dans [Fen14] et [Fen15c] (rappelés dans les chapitres C et D).

Contrairement aux deux articles que nous avons présentés de manière différente, nous allons ici rassembler les deux approches que nous avons développées sur les espaces de Hardy. À cause de cela, nous allons énoncer des résultats plus généraux que ceux de [Fen14], mais les preuves de [Fen14] s'adaptent sans aucune difficulté.

Nous donnons dans ce chapitre la version discrète de résultats dans [AMR08] et [HLM+11].

3.1 Quasidistances

On définit d'abord la notion de quasidistance sur un graphe.

Définition 3.1.1. *Une quasidistance sur le graphe* (Γ, μ) *est une application* $\rho : \Gamma^2 \to \mathbb{N}$ *vérifiant :*

(i) la propriété de symétrie : pour tous $x, y \in \Gamma$*,* $\rho(x, y) = \rho(y, x)$*,*

(ii) la propriété de séparation des points : $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$*,*

(iii) pour tous $x, y \in \Gamma$ *tels que* $x \sim y$*,* $x \neq y$*, on a* $\rho(x, y) = 1$*,*

(iv) la quasi-inégalité triangulaire : il existe $C > 0$ *telle que pour tous* $x, y, z \in \Gamma$*,*

$$\rho(x, y) \leq C[\rho(x, z) + \rho(z, y)]. \tag{3.1}$$

La plus petite valeur C *pour laquelle* (3.1) *est vérifiée (qui existe bien) est nommée* C_ρ*.*

On définit ensuite les boules $B_\rho(x, k)$ par

$$B_\rho(x, k) = \{y \in \Gamma,\ \rho(x, y) < k\}$$

puis les poids $V_\rho(x, k)$ des boules $B_\rho(x, k)$ par

$$V_\rho(x, k) = m(B_\rho(x, k)) = \sum_{x \in B(x,k)} m(x).$$

L'indexation par ρ va être supprimée par la suite et ne sera rappelée que lorsque l'on manipulera plusieurs quasidistances différentes.

On définit ensuite les anneaux $C_j(x,k)$ par

$$C_j(x,k) = \{y \in \Gamma,\ \rho(x,y) \in [C_\rho 2^j k, C_\rho 2^{j+1} k)\}$$

si $j \in \mathbb{N}^*$ et $C_0(x,k)$ par $C_0(x,k) = \{y \in \Gamma,\ \rho(x,y) < 2C_\rho k)\}$.

Dans ce contexte, on rappelle l'hypothèse de doublement :

Définition 3.1.2. *Le graphe* (Γ, μ, ρ) *satisfait* (DV_ρ) *si*

$$V_\rho(x,2k) \lesssim V_\rho(x,k) \qquad \forall x \in \Gamma,\ \forall k \in \mathbb{N}^*. \tag{DV_ρ}$$

Remarque 3.1.3. *La propriété de doublement implique, comme avec la distance usuelle, l'existence de* $d \in \mathbb{R}_+^*$ *tel que*

$$V(x,\lambda k) \lesssim \lambda^d V(x,k) \qquad \forall x \in \Gamma, \forall \lambda, r \in \mathbb{N}^*. \tag{3.2}$$

La borne inférieure des d *vérifiant* (3.2) *est notée* d_0.

Remarque 3.1.4. *Dans ces espaces mesurés* (Γ, μ, ρ)*, la fonction maximale de Hardy-Littlewood est toujours continue sur* $L^p(\Gamma)$ *et de type* $(1,1)$ *faible ([CW77, Theorem 3.5]). De plus, nous conservons un lemme de recouvrement "M.r" (où la constante M vaut 5 lorsque* $C_\rho = 1$*) ([CW77, Theorem 3.1]) et la décomposition de Whitney ([CW77, Theorem 3.2], voir aussi [MMMM13, Theorem 4.21]).*

3.2 Espaces de tentes

Les espaces de tentes sont des espaces de fonctions définies sur $X \times \mathbb{R}_+^*$, où l'espace métrique mesuré X représente "l'espace" et $\mathbb{R}_+^*$ est "le temps". Ces espaces sont en particulier bien adaptés à l'étude, par exemple, de fonctions maximales et de fonctionnelles quadratiques. Ainsi (voir paragraphe 1.2.1), ils apparaissent naturellement pour l'étude des espaces de Hardy.

Les espaces de tentes dans le cadre euclidien $X = \mathbb{R}^d$ ont été introduits et étudiés par Coifman, Meyer et Stein dans [CMS85]. Néanmoins, les méthodes employées dans [CMS85] peuvent être généralisées au cadre des espaces de type homogène (cf [Rus07]).

Dans ce paragraphe, nous présentons les espaces de tentes sur les graphes (Γ, μ, ρ). Nous allons aussi énoncer le résultat sur la décomposition atomique de ces espaces établi par l'auteur dans [Fen15c]. Les différences par rapport à [Rus07] sont que la droite du "temps" est discrétisée et devient $\mathbb{N}^*$, et que l'on considère une quasidistance et non plus une distance.

Définition 3.2.1. *On introduit les sous-ensembles de* $\Gamma \times \mathbb{N}^*$ *suivants. Si* $x \in \Gamma$,

$$\gamma(x) := \{(y,k) \in \Gamma \times \mathbb{N}^*,\ \rho(x,y) < k\}$$

est le cône de sommet x.
Si $F \subset \Gamma$,

$$\mathcal{R}(F) = \bigcup_{x \in F} \gamma(x) = \{(y,k) \in \Gamma \times \mathbb{N}^*,\ \rho(y,E) < k\},$$

et si $O \subset \Gamma$,

$$\mathcal{T}(O) = \{(y,k) \in \Gamma \times \mathbb{N}^*,\ \rho(y, O^c) \geq k\}.$$

On définit ensuite les fonctionnelles $\mathcal{A}$ et $\mathcal{C}$ envoyant des fonctions sur $\Gamma \times \mathbb{N}^*$ vers des fonctions sur Γ par

$$\mathcal{A}f(x) = \left(\sum_{(y,k)\in\gamma(x)} \frac{m(y)}{kV(x,k)} |f(y,k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

et

$$\mathcal{C}f(x) = \sup_{x\in B} \left(\frac{1}{V(B)} \sum_{(y,k)\in\mathcal{T}(B)} \frac{m(y)}{k} |f(y,k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Pour tout $p \in [1, +\infty)$, l'espace de tentes $T^p(\Gamma)$ est l'espace des fonctions f sur $\Gamma \times \mathbb{N}^*$ telles que $\mathcal{A}f \in L^p(\Gamma)$. De plus, l'espace de tentes $T^\infty(\Gamma)$ est l'espace des fonctions f sur $\Gamma \times \mathbb{N}^*$ telles que $\mathcal{C}f \in L^\infty(\Gamma)$. L'espace $T^p(\Gamma)$ est muni de la norme $\|f\|_{T^p} = \|\mathcal{A}f\|_{L^p}$ (ou $\|f\|_{T^\infty} = \|\mathcal{C}f\|_{L^\infty}$ lorsque $p = \infty$).

Remarque 3.2.2. *Nous avons l'égalité des ensembles suivante*

$$\mathcal{R}(O^c) = (\mathcal{T}(O))^c.$$

Définition 3.2.3. *Une fonction a définie sur $\Gamma \times \mathbb{N}^*$ est un T^1-atome s'il existe une boule $B \subset \Gamma$ telle que*

(i) a est à support dans $\mathcal{T}(B)$,

(ii) $\displaystyle\sum_{(y,k)\in\mathcal{T}(B)} \frac{m(y)}{k} |a(y,k)|^2 \leq \frac{1}{V(B)}$.

Lemme 3.2.4. *Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout T^1-atome a, on a*

$$\|a\|_{T^1} \leq C.$$

Nous avons alors la dualité des espaces $T^1(\Gamma)$ et $T^\infty(\Gamma)$, ainsi que la décomposition atomique de l'espace $T^1(\Gamma)$.

Théorème 3.2.5. *(i) L'inégalité suivante est vérifiée dès lors que $f \in T^1(\Gamma)$ et $g \in T^\infty(\Gamma)$:*

$$\sum_{(y,k)\in\Gamma\times\mathbb{N}^*} \frac{m(y)}{k} |f(y,k)g(y,k)| \lesssim \sum_{x\in\Gamma} \mathcal{A}f(x)\mathcal{C}f(x)m(x).$$

(ii) Le crochet de dualité

$$\langle f, g\rangle = \sum_{(y,k)\in\Gamma\times\mathbb{N}^*} \frac{m(y)}{k} f(y,k)g(y,k)$$

définit un isomorphisme entre $T^\infty(\Gamma)$ et $(T^1(\Gamma))^*$.

(iii) Chaque fonction $f \in T^1(\Gamma)$ peut être écrite comme $f = \sum \lambda_j a_j$ où les a_j sont des T^1-atomes, $\lambda_j \in \mathbb{R}$ et $\sum |\lambda_j| \lesssim \|f\|_{T^1}$.

(iv) De plus, si $f \in T^1(\Gamma) \cap T^2(\Gamma)$, la décomposition atomique peut être choisie convergente dans $T^2(\Gamma)$.

3.3 1-formes différentielles sur les graphes

On définit pour tout $x \in \Gamma$, l'ensemble $T_x = \{(x,y) \in \Gamma^2,\, y \sim x\}$ qui joue le rôle de l'espace tangent à Γ en x et puis,

$$T_\Gamma = \bigcup_{x\in\Gamma} T_x = \{(x,y) \in \Gamma^2,\, y \sim x\}.$$

En particulier, T_Γ va être pour nous le fibré tangent de Γ.

Définition 3.3.1. *Si $x \in \Gamma$, on définit, pour toute fonction F_x définie sur T_x la norme*

$$|F_x|_{T_x} = \left(\frac{1}{2} \sum_{y\sim x} p(x,y)m(y)|F_x(x,y)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

De plus, la fonction $F : T_\Gamma \to \mathbb{R}$ appartient $L^p(T_\Gamma)$ si

(i) F est antisymétrique, c'est-à-dire $F(x,y) = -F(y,x)$ pour tout $x \sim y$,

(ii) $\|F\|_{L^p(T_\Gamma)} := \|x \mapsto |F(x,.)|_{T_x}\|_{L^p(\Gamma)} < +\infty$.

L'espace de Hilbert $L^2(T_\Gamma)$ est muni du produit scalaire $\langle , \rangle$ défini comme

$$\langle F, G\rangle = \frac{1}{2} \sum_{x,y\in\Gamma} p(x,y)F(x,y)G(x,y)m(x)m(y).$$

Remarque 3.3.2. *Une fonction antisymétrique sur T_Γ sera appelée une 1-forme différentielle, ou forme différentielle d'ordre 1.*

Définition 3.3.3. *Soient f et F deux fonctions sur respectivement Γ et T_Γ . On définit les opérateurs d (envoyant les fonctions sur les 1-formes) et d^* (envoyant les 1-formes sur les fonctions) par*

$$df(x,y) := f(x) - f(y) \qquad \forall (x,y) \in T_\Gamma$$

et

$$d^*F(x) := \sum_{y\sim x} p(x,y)F(x,y)m(y) \qquad \forall x \in \Gamma.$$

Remarque 3.3.4. *On vérifie facilement que $d^*d = \Delta$ et $|df(x,.)|_{T_x} = \nabla f(x)$. En particulier, la norme (ou longueur) de d est égal à la longueur du gradient ∇. Nous appellerons l'opérateur d la différentielle.*

Comme suggéré par la notation, d^* est l'adjoint de d, c'est-à-dire

Proposition 3.3.5. *Pour tout $f \in L^2(\Gamma)$ et $G \in L^2(T_\Gamma)$, on a*

$$\langle df, G\rangle_{L^2(T_\Gamma)} = \langle f, d^*G\rangle_{L^2(\Gamma)}. \tag{3.3}$$

Nous introduisons à présent un sous-espace de $L^2(T_\Gamma)$, appelé $H^2(T_\Gamma)$, défini comme l'adhérence dans $L^2(T_\Gamma)$ de

$$E^2(T_\Gamma) := \{F \in L^2(T_\Gamma),\, \exists f \in L^2(\Gamma) : \, F = df\}. \tag{3.4}$$

Remarquons que $d\Delta^{-1}d^* = Id_{E^2(T_\Gamma)}$. L'opérateur $d\Delta^{-1}d^*$ peut donc être étendu en un opérateur borné sur $H^2(T_\Gamma)$ et

$$d\Delta^{-1}d^* = Id_{H^2(T_\Gamma)}. \tag{3.5}$$

Plus précisément, nous avons le résultat suivant

Proposition 3.3.6. *Pour tout $p \in [1, +\infty]$, l'opérateur d^* est continu de $L^p(T_\Gamma)$ dans $L^p(\Gamma)$.*

La transformée de Riesz $d\Delta^{-\frac{1}{2}}$ est une isométrie de $L^2(\Gamma)$ dans $H^2(T_\Gamma)$, et son adjoint $\Delta^{-\frac{1}{2}} d^*$ est donc une isométrie de $H^2(T_\Gamma)$ dans $L^2(\Gamma)$.

3.4 Estimations de Gaffney et leurs conséquences

Les estimations de Gaffney sont des estimations L^2-L^2 (ou plus généralement L^p-L^p) hors diagonale, c'est-à-dire que si f est à support dans F, la norme $L^2(E)$ de $P^l f$ décroit avec un facteur exponentiel en $\rho(E, F)$. Plus précisément :

Définition 3.4.1. *On dit que (Γ, μ, ρ) satisfait les estimations de Gaffney* (GUE$_\rho$) *s'il existe $C, c > 0$ et $\eta \in (0, 1]$ tels que pour tous ensembles $E, F \subset \Gamma$ et toute fonction f, on a*

$$\|P^{k-1}[f \mathbb{1}_F]\|_{L^2(E)} \leq C \exp\left(-c \left[\frac{\rho(x,y)}{k} \right]^\eta \right) \|f\|_{L^2} \qquad \forall k \in \mathbb{N}^*. \tag{GUE$_\rho$}$$

Remarque 3.4.2. *Si $\rho = d^2$, alors (Γ, μ, d^2) satisfait (GUE$_{d^2}$) dès lors que (Γ, μ) satisfait* (LB) *ou* (LDV) *(cf [CGZ05]).*

Si (Γ, μ, ρ) vérifie (UE$_\rho$) *(cf paragraphe 3.5), alors il vérifie* (GUE$_\rho$).

Enfin notons que si $\rho_1 \lesssim \rho_2$, alors (GUE$_{\rho_2}$) implique (GUE$_{\rho_1}$).

Les estimations de Gaffney sur $(P^k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ se “transmettent” alors à d'autres familles d'opérateurs, comme en particulier la résolvante (cf [Fen14, Proposition 2.6].

Proposition 3.4.3. *Supposons que le graphe (Γ, μ, ρ) vérifie* (GUE$_\rho$) *et* (LB). *Alors*

1. *pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, il existe $c_j > 0$ tel que pour tous $E, F \subset \Gamma$,*

$$\|(k\Delta)^j P^{k-1}[f \mathbb{1}_F]\|_{L^2(E)} \lesssim \exp\left(-c_j \left[\frac{\rho(x,y)}{k} \right]^\eta \right) \|f\|_{L^2} \qquad \forall k \in \mathbb{N}^*,$$

2. *pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe $c_m > 0$ tel que pour tous $E, F \subset \Gamma$,*

$$\|(I + s\Delta)^{-m}[f \mathbb{1}_F]\|_{L^2(E)} \lesssim \exp\left(-c_m \left[\frac{\rho(x,y)}{s} \right]^{\frac{\eta}{2}} \right) \|f\|_{L^2} \qquad \forall s \in \mathbb{R}_+^*,$$

et

$$\|[I - (I + s\Delta)^{-1}]^m [f \mathbb{1}_F]\|_{L^2(E)} \lesssim \exp\left(-c_m \left[\frac{\rho(x,y)}{s} \right]^{\frac{\eta}{2}} \right) \|f\|_{L^2} \qquad \forall s \in \mathbb{R}_+^*,$$

3. *pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe $c_m > 0$ tel que pour tous $E, F \subset \Gamma$,*

$$\|(I - P^{k_1}) \dots (I - P^{k_m})[f \mathbb{1}_F]\|_{L^2(E)} \lesssim \exp\left(-c_m \left[\frac{\rho(x,y)}{k_1} \right]^\eta \right) \|f\|_{L^2}$$

pour tout m-uplet $(k_1, \dots, k_m) \in (\mathbb{N}^*)^m$ tel que $k_1 \leq \dots \leq k_m \leq 2k_1$.

Précisons que l'exposant η apparaissant dans les estimations de cette proposition est le même que celui apparaissant dans (GUE_ρ).

En combinant la Proposition 2.8.5 avec les méthodes utilisées pour montrer la proposition précédente, on obtient (cf [Fen14, Corollary 2.11]) :

Proposition 3.4.4. *Soit* (Γ, μ, ρ) *un graphe vérifiant* (GUE_ρ) *et* (LB), *et* $p \in (1, 2)$. *Alors*

(i) pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, *il existe* $c_{p,j} > 0$ *tel que pour tous* $E, F \subset \Gamma$,

$$\|\nabla(k\Delta)^j P^{k-1}[f\mathbb{1}_F]\|_{L^p(E)} \lesssim \exp\left(-c_{p,j}\left[\frac{\rho(x,y)}{k}\right]^\eta\right)\|f\|_{L^p} \qquad \forall k \in \mathbb{N}^*,$$

(ii) pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, *il existe* $c_{p,m} > 0$ *tel que pour tous* $E, F \subset \Gamma$ *et tout* $s > 0$

$$\|s^{m-\frac{1}{2}}\nabla\Delta^{m-1}(I + s\Delta)^{\frac{1}{2}-m}[f\mathbb{1}_F]\|_{L^p(E)} \lesssim \exp\left(-c_{p,m}\left[\frac{\rho(x,y)}{s}\right]^{\frac{\eta}{2}}\right)\|f\|_{L^p}.$$

Dans le cas particulier où $\rho = d^2$, *alors les estimations de cette proposition sont aussi vraies pour* $p = 2$.

3.5 Estimations ponctuelles supérieures

Pour avoir plus de propriétés sur nos espaces de Hardy, nous allons parfois avoir besoin de supposer des estimations ponctuelles sur le noyau de Markov.

Définition 3.5.1. *On dit que* (Γ, μ, ρ) *satisfait les estimations ponctuelles* (UE_ρ) *s'il existe* $C, c > 0$ *et* $\eta \in (0, 1]$ *tels que pour toute fonction* f, *on a*

$$p_{k-1}(x,y) \le \frac{C}{\sqrt{V(x,k)V(y,k)}}\exp\left(-c\left[\frac{\rho(x,y)}{k}\right]^\eta\right) \qquad \forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x, y \in \Gamma. \qquad (\mathrm{UE}_\rho)$$

Comme dans le le chapitre précédent, les estimations (UE_ρ) sont équivalentes, sous (DV_ρ), à

$$p_{k-1}(x,y) \le \frac{C}{V(x,k)}\exp\left(-c\left[\frac{\rho(x,y)}{k}\right]^\eta\right) \qquad \forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x, y \in \Gamma.$$

Ces estimations ponctuelles permettent d'avoir des estimations ponctuelles sur les différences "en temps" de $p_k(x, y)$.

Proposition 3.5.2. *Soient* (Γ, μ, ρ) *un graphe vérifiant* (UE_ρ) (DV_ρ) *et* (LB), *et* $j \in \mathbb{N}$. *On rappelle que* $D(1)$ *est l'opérateur agissant sur les suites par* $D(1)u_k = u_{k+1} - u_k$. *Alors il existe deux constantes* $C_j, c_j > 0$ *telles que*

$$\left|D(1)^j p_{k-1}(x,y)\right| \le \frac{C_j}{k^j V(x,k)}\exp\left(-c_j\left[\frac{\rho(x,y)}{k}\right]^\eta\right) \qquad \forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x, y \in \Gamma.$$

La valeur de η *dans l'inégalité précédente est égale à celle apparaissant dans* (UE_ρ).

3.6 Espaces BMO : définitions & résultats

Fixons $x_0 \in \Gamma$ et définissons $B_0 = B(x_0, 1) = \{x_0\}$. Pour $\epsilon > 0$ et $M \in \mathbb{N}$, pour toute fonction $\phi \in L^2(\Gamma)$ telle que $\phi = \Delta^M \varphi$ avec $\varphi \in L^2$ à support fini, on définit

$$\|\phi\|_{\mathcal{M}_0^{M,\epsilon}} := \sup_{j\geq 1} \left[2^{j\epsilon} V(2^j B_0)^{\frac{1}{2}} \|\varphi\|_{L^2(C_j(B_0))} \right] \in [0, +\infty].$$

On définit ensuite

$$\mathcal{M}_0^{M,\epsilon} := \left\{ \phi = \Delta^M \varphi \in L^2(\Gamma),\ \|\phi\|_{\mathcal{M}_0^{M,\epsilon}} < +\infty \right\}.$$

Définition 3.6.1. *Pour tout $M \in \mathbb{N}$, on définit les espaces de "distributions"*

$$\mathcal{E}_M = \bigcup_{\epsilon>0} (\mathcal{M}_0^{M,\epsilon})^*$$

et

$$\mathcal{F}_M = \bigcap_{\epsilon>0} (\mathcal{M}_0^{M,\epsilon})^*.$$

Proposition 3.6.2. *Soient $M \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{N}^*$ et $(s_1, \dots, s_M) \in [\![s, 2s]\!]^M$.*

Soit $\varphi \in L^2(B)$ pour une boule $B \subset \Gamma$. Alors les fonctions $(I - P^{s_1}) \dots (I - P^{s_M})\varphi$ et $(I - (I + s\Delta)^{-1})^M \varphi$ sont dans $\mathcal{M}_0^{M,\epsilon}$ pour tout $\epsilon \in (0, +\infty)$.

Soit $f \in \mathcal{E}_M$. Il existe $\epsilon > 0$ tel que $f \in (\mathcal{M}_0^{M,\epsilon})^*$. Alors on peut définir $(I-P^{s_1}) \dots (I-P^{s_M})f$ et $(I - (I + s\Delta)^{-1})^M f$ comme des formes linéaires continues sur les fonctions $\varphi \in L^2(\Gamma)$ à support fini par

$$\langle (I - P^{s_1}) \dots (I - P^{s_M})f, \varphi \rangle = \langle f, (I - P^{s_1}) \dots (I - P^{s_M})\varphi \rangle_{(\mathcal{M}_0^{M,\epsilon})^*, \mathcal{M}_0^{M,\epsilon}}$$

et

$$\left\langle (I - (I + s\Delta)^{-1})^M f, \varphi \right\rangle = \left\langle f, (I - (I + s\Delta)^{-1})^M \varphi \right\rangle_{(\mathcal{M}_0^{M,\epsilon})^*, \mathcal{M}_0^{M,\epsilon}}.$$

Définition 3.6.3. *Soient $M \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{E}_M$.*

On dit que f appartient à $BMO_{BZ1,M}(\Gamma)$ si

$$\|f\|_{BMO_{BZ1,M}} := \sup_{\substack{s\in\mathbb{N}^*,\\ (s_1,\dots,s_M)\in[\![s,2s]\!]^M,\\ x\in\Gamma}} \left(\frac{1}{V(x,s)} \sum_{y\in B(x,s)} |(I - P^{s_1}) \dots (I - P^{s_M})f(y)|^2 m(y) \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty. \tag{3.6}$$

On dit que f appartient à $BMO_{BZ2,M}(\Gamma)$ si

$$\|f\|_{BMO_{BZ2,M}} := \sup_{\substack{s\in\mathbb{N}^*,\\ x\in\Gamma}} \left(\frac{1}{V(x,s)} \sum_{y\in B(x,s)} |[I - (I + s\Delta)^{-1}]^M f(y)|^2 m(y) \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty. \tag{3.7}$$

On a alors le résultat suivant :

Théorème 3.6.4. *Soit* (Γ, μ, ρ) *vérifiant* (GUE_ρ), (DV_ρ) *et* (LB). *Soit* $M \in \mathbb{N}^*$.

Alors on a l'égalité des espaces $BMO_{BZ1,M}(\Gamma) = BMO_{BZ2,M}(\Gamma)$ *et leurs normes sont équivalentes.*

Remarque 3.6.5. *Ce résultat peut être vu comme l'analogue de [HLM+11, Lemma 6.1] ou de [HM09, Lemma 8.1]. Il établit que les espaces BMO peuvent être définis de manière équivalente en utilisant la chaine de Markov* P^k *(ou le semigroupe, dans [HM09, HLM+11]) et la résolvante.*

On s'attendrait à avoir l'équivalence entre $BMO_{BZ2,M}(\Gamma)$ *et l'espace* $BMO_{BZ1bis,M}(\Gamma)$ *des fonctions vérifiant*

$$\|f\|_{BMO_{BZ1bis,M}} := \sup_{\substack{s\in\mathbb{N}^*,\\ x\in\Gamma}} \left(\frac{1}{V(x,s)} \sum_{y\in B(x,s)} |(I-P^s)^M f(y)|^2 m(y) \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

Néanmoins, nous ne savons pas si on a effectivement $BMO_{BZ1,M}(\Gamma) = BMO_{BZ1bis,M}(\Gamma)$ *pour tout* $M \in \mathbb{N}^*$.
Notons que lorsque $M \in \{0, 1\}$, *l'égalité* $BMO_{BZ1,M}(\Gamma) = BMO_{BZ1bis,M}(\Gamma)$ *est immédiate. Il est aussi possible de montrer cette égalité pour* $M = 2$ *en utilisant la relation* $2(1-a)(1-b) = (1-a)^2 + (1-b)^2 - (a-b)^2$.

De plus,

Théorème 3.6.6. *Soit* (Γ, μ, ρ) *vérifiant* (GUE_ρ), (DV_ρ) *et* (LB). *Soit* $M \in \mathbb{N}^*$.

Alors les espaces $BMO_{BZ,M}(\Gamma)$, *initialement définis comme des sous-espaces de* $\mathcal{E}_M$, *sont en fait inclus dans* $\mathcal{F}_M$, *i.e.*

$$BMO_{BZ1,M}(\Gamma) = BMO_{BZ1,M}(\Gamma) \cap \mathcal{F}_M = BMO_{BZ2,M}(\Gamma) = BMO_{BZ2,M}(\Gamma) \cap \mathcal{F}_M.$$

Remarque 3.6.7. *Ce résultat fait le lien entre [HLM+11] où l'espace BMO est défini à partir de* $\mathcal{F}_M$ *et [DY05b] où BMO est un sous ensemble d'un espace de distribution assimilable à* $\mathcal{E}_M$.

3.7 Espaces de Hardy de fonction définis par décomposition moléculaire

On définit deux types de molécules, correspondant aux deux types d'espaces *BMO* introduits dans le paragraphe précédent.

Définition 3.7.1. *Soit* $M \in \mathbb{N}^*$. *Quand* $\epsilon \in (0, +\infty)$, *une fonction* $a \in L^2(\Gamma)$ *est appelée* (BZ_1, M, ϵ)*-molécule s'il existe* $s \in \mathbb{N}^*$, *un* M*-uplet* $(s_1, \dots, s_M) \in [\![s, 2s]\!]^M$, $x \in \Gamma$ *et une fonction* $b \in L^2(\Gamma)$ *tels que*

(i) $a = (I - P^{s_1}) \dots (I - P^{s_M}) b$,

(ii) $\|b\|_{L^2(C_j(x,s))} \leq 2^{-j\epsilon} V(x, 2^j s)^{-\frac{1}{2}}$, $\forall j \geq 0$.

Une fonction $a \in L^2(\Gamma)$ *est appelée* (BZ_1, M, ∞)*-molécule (ou* (BZ_1, M)*-atome) s'il existe* $s \in \mathbb{N}^*$, *un* M*-uplet* $(s_1, \dots, s_M) \in [\![1, M]\!]^M$, *un sommet* $x \in \Gamma$ *et une fonction* $b \in L^2(\Gamma)$ *à support dans* $B(x, s)$ *tels que*

(i) $a = (I - P^{s_1}) \dots (I - P^{s_M}) b$,

(ii) $\|b\|_{L^2} = \|b\|_{L^2(B(x,s))} \leq V(x,s)^{-\frac{1}{2}}$.

On dit que la (BZ_1, M, ϵ)-molécule a est associée à s, au M-uplet $(s_1, \dots, s_M)$ et au sommet x quand on veut se référer aux s, $(s_1, \dots, s_M)$ et x donnés par la définition.

Le second type de molécules est défini à l'aide de la résolvante :

Définition 3.7.2. *Soit $M \in \mathbb{N}^*$. Lorsque $\epsilon \in (0, +\infty)$, une fonction $a \in L^2(\Gamma)$ est appelée (BZ_2, M, ϵ)-molécule s'il existe $s \in \mathbb{N}^*$, un sommet $x \in \Gamma$ et une fonction $b \in L^2(\Gamma)$ tels que*

(i) $a = [I - (I + s\Delta)^{-1}]^M b$,

(ii) $\|b\|_{L^2(C_j(x,s))} \leq 2^{-j\epsilon} V(x, 2^j s)^{-\frac{1}{2}}$, $\forall j \geq 0$.

Une fonction $a \in L^2(\Gamma)$ est appelée (BZ_2, M, ∞)-molécule (ou (BZ_2, M)-atome) s'il existe $s \in \mathbb{N}^*$, un sommet $x \in \Gamma$ et une fonction $b \in L^2(\Gamma)$ à support dans $B(x,s)$ tels que

(i) $a = [I - (I + s\Delta)^{-1}]^M b$,

(ii) $\|b\|_{L^2} = \|b\|_{L^2(B(x,s))} \leq V(x,s)^{-\frac{1}{2}}$.

On dit que la (BZ_2, M, ϵ)-molécule a est associée à s et au sommet x quand on veut se référer aux s et x donnés par la définition.

Comme conséquence de la Proposition 3.4.3, on a le résultat suivant

Proposition 3.7.3. *Soit* (Γ, μ, ρ) *vérifiant* (GUE_ρ), (DV_ρ) *et* (LB).

Si a est une molécule vérifiant la Définition 3.7.1 ou la Définition 3.7.2, alors $\|a\|_{L^1} \lesssim 1$.

Définissons maintenant les espaces de Hardy associés à ces molécules.

Définition 3.7.4. *Soient $M \in \mathbb{N}^*$ et $\kappa \in \{1, 2\}$.*

Soit $\epsilon \in (0, +\infty]$. On dit que f appartient à $H^1_{BZ\kappa,M,\epsilon}(\Gamma)$ si f admet une (BZ_κ, M, ϵ)-représentation moléculaire, c'est-à-dire s'il existe une suite $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell^1$ et une suite $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de (BZ_κ, M, ϵ)-molécules telles que

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i a_i \tag{3.8}$$

où la série converge simplement (point par point). L'espace est muni de la norme

$$\|f\|_{H^1_{BZ\kappa,M,\epsilon}} = \inf \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} |\lambda_j|, \ \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j a_j, \ \textit{est une } (BZ_\kappa, M, \epsilon)\textit{-repr. mol. de } f \right\}.$$

Proposition 3.7.5. *Soit $M \in \mathbb{N}^*$, $\kappa \in \{1, 2\}$ et $\epsilon \in (0, +\infty]$. Alors l'espace $H^1_{BZ\kappa,M,\epsilon}(\Gamma)$ est complet. De plus, $H^1_{BZ\kappa,M,\epsilon}(\Gamma) \subset L^1(\Gamma)$.*

Démonstration: L'injection $H^1_{BZ\kappa,M,\epsilon}(\Gamma) \subset L^1(\Gamma)$ est une conséquence immédiate de la Proposition 3.9.2, qui montre que, si $f \in H^1_{BZ\kappa,M,\epsilon}(\Gamma)$, la série (3.8) converge dans $L^1(\Gamma)$, et donc converge vers f dans $L^1(\Gamma)$. De plus, l'espace $H^1_{BZ\kappa,M,\epsilon}(\Gamma)$ est complet s'il a la propriété

$$\sum_{j=0}^{\infty} \|f_j\|_{H^1_{BZ\kappa,M,\epsilon}} < +\infty \Longrightarrow \sum_{j=0}^{\infty} f_j \text{ converge dans } H^1_{BZ\kappa,M,\epsilon}(\Gamma).$$

Ceci est dans notre cas aussi une conséquence de $\|a\|_{L^1} \lesssim 1$ dès que a est une molécule. □

Remarque 3.7.6. *Les molécules "BZ_κ" sont des molécules au sens de Bernicot et Zhao (cf [BZ08], et donc nos espaces de Hardy sont des espaces de Hardy au sens de Bernicot et Zhao.*

Remarquons que la définition des molécules est légèrement différente de celle trouvée dans [AMR08], [HM09] ou [HLM⁺11]. Nous reviendrons sur nos choix et ferons la comparaison avec les autres molécules dans le paragraphe 3.12.

Les espaces de Hardy introduits ici sont les préduaux des espaces BMO introduits au paragraphe précédent.

Théorème 3.7.7. *Soit* (Γ, μ, ρ) *vérifiant* (GUE_ρ), (DV_ρ) *et* (LB). *Soient* $M \in \mathbb{N}^*$, $\kappa \in \{1,2\}$ *et* $\epsilon \in (0, +\infty]$.

Alors l'espace dual de $H^1_{BZ\kappa,\epsilon}(\Gamma)$ *est* $BMO_{BZ1,M}(\Gamma) = BMO_{BZ2,M}(\Gamma)$.

Par conséquent l'espace $H^1_{BZ\kappa,M,\epsilon}(\Gamma)$ *ne dépend ni de* ϵ *ni de* κ. *On écrira* $H^1_{mol,M}(\Gamma)$ *pour désigner l'un de ces espaces.*

Si on suppose les estimations ponctuelles, on a alors le résultat supplémentaire suivant :

Théorème 3.7.8. *Soit* (Γ, μ, ρ) *vérifiant* (UE_ρ), (DV_ρ) *et* (LB).

Si un opérateur sous-linéaire T *est continu de* $H^1_{mol,M}(\Gamma)$ *dans* $L^1(\Gamma)$ *et sur* $L^2(\Gamma)$, *alors il s'étend en un opérateur continu sur* $L^p(\Gamma)$ *pour tout* $p \in (1,2)$.

Démonstration: C'est une application du Theorem 5.3 dans [BZ08] pour l'espace de Hardy $H^1_{BZ1,M,\infty}(\Gamma)$. □

3.8 Espaces de Hardy de fonctions définis à l'aide de fonctionnelles quadratiques

Définition 3.8.1. *On définit, pour* $\beta > 0$, *les fonctionnelles quadratiques* L_β *sur* $L^2(\Gamma)$ *par*

$$L_\beta f(x) = \left(\sum_{(y,k)\in\gamma(x)} \frac{k^{2\beta-1}}{V(x,k)} |\Delta^\beta P^{k-1} f(y)|^2 m(y) \right)^{\frac{1}{2}}$$

où on rappelle que $\gamma(x) = \{(y,k) \in \Gamma \times \mathbb{N}^*,\ \rho(x,y) < k\}$.

Remarque 3.8.2. *Cette fonctionnelle est une version non tangentielle de* g_β. *Plus précisément, on obtient* g_β *lorsque l'on remplace (dans* L_β*) pour chaque* $x \in \Gamma$ *et* $k \in \mathbb{N}^*$ *la moyenne de* $|\Delta^\beta P^{k-1} f|^2$ *sur* $B(x,k)$ *par la valeur de* $|\Delta^\beta P^{k-1} f|^2$ *en* x.

Définition 3.8.3. *L'espace* $E^1_{quad,\beta}(\Gamma)$ *est défini par*

$$E^1_{quad,\beta}(\Gamma) := \left\{ f \in L^2(\Gamma),\ \|L_\beta f\|_{L^1} < +\infty \right\}.$$

Il est muni de la norme

$$\|f\|_{H^1_{quad,\beta}} := \|L_\beta f\|_{L^1}.$$

Remarque 3.8.4. *Notons que* $\|f\|_{H^1_{quad,\beta}}$ *est une norme parce que le noyau de* Δ *est réduit à* $\{0\}$ *(et ceci parce que l'ensemble* Γ *est infini par hypothèse). Donc, si* $k > \beta$ *est un entier et* $f \in L^2(\Gamma)$ *est telle que* $\Delta^\beta f = 0$, *alors* $\Delta^k f = \Delta^{k-\beta}\Delta^\beta f = 0$, *et ainsi* $f = 0$.

Remarque 3.8.5. *L'espace $E^1_{quad,\beta}(\Gamma)$ peut être défini de la manière équivalente suivante*

$$E^1_{quad,\beta}(\Gamma) := \left\{ f \in L^2(\Gamma),\ \left([k\Delta]^\beta P^{k-1} f\right)_{k\in\mathbb{N}^*} \in T^1(\Gamma) \right\}$$

avec la norme $\|f\|_{H^1_{quad,\beta}} := \|[k\Delta]^\beta P^{k-1} f\|_{T^1}$. On a aussi

$$E^1_{quad,\beta}(\Gamma) := \left\{ f \in L^2(\Gamma),\ \exists g \in T^2(\Gamma) \cap T^1(\Gamma) :\ f = \pi_\beta(g) \right\}$$

avec la norme $\|f\|_{H^1_{quad,\beta}} := \inf\{\|g\|_{T^1},\ f = \pi_\beta(g)\}$ et où π_β est une application continue de T^2 dans L^2. La méthode est d'établir une formule reproduisante de Calderón ; puis définir π_β telle que $\pi_\beta([k\Delta]^\beta P^{k-1} f) = f$.

Théorème 3.8.6. *Soit (Γ, μ, ρ) un graphe satisfaisant (GUE_ρ), (DV_ρ) et (LB).*

Pour tout $\beta > 0$, la complétion de $E^1_{quad,\beta}(\Gamma)$ dans $L^1(\Gamma)$ existe. Elle sera notée $H^1_{quad,\beta}(\Gamma)$.

Remarque 3.8.7. *La complétion d'un espace vectoriel normé existe toujours en tant qu'espace métrique. La conclusion du Théorème 3.8.6 (qui est une version discrète du cas $p = 1$ de [AMM, Theorem 1.1]) est que cette complétion (qui* a priori *est un espace métrique abstrait) peut être identifiée à un sous-espace de $L^1(\Gamma)$.*
Il faut noter que, de façon générale, il peut arriver que, si X est un sous-espace d'un espace de Banach Y tel que l'injection de X dans Y est continue, il n'existe pas de complétion de X dans Y. Soit en effet Y un espace de Banach de dimension infinie, muni d'une norme N. On définit X comme l'espace Y muni de la norme $N_1(y) := N(y) + |f(y)|$ pour tout $y \in Y$, où f est une forme linéaire non continue sur Y. On suppose que $\widetilde{X}$ est une complétion de X dans Y. Cela signifie que $X \hookrightarrow \tilde{X} \hookrightarrow Y$, X est dense dans $\widetilde{X}$, $\|y\|_{\widetilde{X}} = \|y\|_{N_1}$ pour tout $y \in X$ et $\widetilde{X}$ est complet pour la norme $\|\cdot\|_{\widetilde{X}}$. Cela entraîne que $\widetilde{X} = X = Y$ comme ensembles, et $\|y\|_{\widetilde{X}} = N_1(y)$ pour tout $y \in X$. Ainsi, Y serait complet pour la norme N_1.
L'application $y \mapsto y$ est un isomorphisme continu de (Y, N_1) sur (Y, N) et (Y, N) et (Y, N_1) sont complets. D'après le théorème de l'application ouverte, la réciproque est continue, ce qui signifie que $N_1 \lesssim N$, donc $|f(y)| \lesssim N(y)$ pour tout $y \in Y$, ce qui est impossible.

3.9 Espaces de Hardy de 1-formes différentielles

Dans ce paragraphe, nous définissons des espaces de Hardy de 1-formes différentielles, à l'aide de molécules d'une part et de fonctionnelles quadratiques d'autre part.

Définition 3.9.1. *Soient $M \in \mathbb{N}^*$ et $\epsilon \in (0, +\infty)$. Une 1-forme $a \in L^2(T_\Gamma)$ est appelée une $(M - \frac{1}{2}, \epsilon)$-molécule s'il existe un sommet $x \in \Gamma$, un entier $s \in \mathbb{N}^*$ et une fonction $b \in L^2(\Gamma)$ tels que*

(i) $a = s^{M-\frac{1}{2}} d\Delta^{M-1}(I + s\Delta)^{\frac{1}{2}-M} b$;

(ii) $\|b\|_{L^2(C_j(x,s))} \leq 2^{-j\epsilon} V(x, 2^j s)^{-\frac{1}{2}}$ *pour tout* $j \geq 0$.

Comme conséquence de la Proposition 3.4.4, on a le résultat suivant :

Proposition 3.9.2. *Soit* (Γ, μ, ρ) *vérifiant* (GUE_ρ), (DV_ρ) *et* (LB).
Si a *est une molécule vérifiant la Définition 3.9.1, alors* $\|a\|_{L^1} \lesssim 1$.

Les espaces de Hardy de 1-formes associés à ces molécules sont alors :

Définition 3.9.3. *Soit* $M \in \mathbb{N}^*$.
Soit $\epsilon \in (0, +\infty)$. *On dit que* f *appartient à* $H^1_{mol,M-\frac{1}{2},\epsilon}(T_\Gamma)$ *si* f *admet une* $(M-\frac{1}{2}, \epsilon)$-*représentation moléculaire, c'est-à-dire s'il existe une suite* $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *dans* $\ell^1(\mathbb{N})$ *et une suite* $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *de* $(M - \frac{1}{2}, \epsilon)$-*molécules telles que*

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i a_i \tag{3.9}$$

où la série converge simplement. L'espace est muni de la norme

$$\|f\|_{H^1_{mol,M,\epsilon}} = \inf \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} |\lambda_j|,\ \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j a_j,\ \textit{est une } (M - \frac{1}{2}, \epsilon)\textit{-repr. mol. de } f \right\}.$$

On a de même

Proposition 3.9.4. *Soit* $M \in \mathbb{N}^*$ *et* $\epsilon \in (0, +\infty)$. *Alors l'espace* $H^1_{mol,M,\epsilon}(T_\Gamma)$ *est complet. De plus,* $H^1_{mol,M,\epsilon}(T_\Gamma) \subset L^1(T_\Gamma)$.

Passons maintenant aux espaces définis par les fonctionnelles quadratiques. On rappelle que $H^2(T_\Gamma)$ est défini comme l'adhérence de $E^2(T_\Gamma)$ dans $L^2(T_\Gamma)$ (cf (3.4)).

Définition 3.9.5. *L'espace* $E^1_{quad,\beta}(T_\Gamma)$ *est défini à partir de* $E^1_{quad,\beta}(\Gamma)$ *comme étant*

$$E^1_{quad,\beta}(T_\Gamma) := \left\{ f \in H^2(T_\Gamma),\ \Delta^{-\frac{1}{2}} d^* f \in E^1_{quad,\beta}(\Gamma) \right\}.$$

On le muni de la norme

$$\|f\|_{H^1_{quad,\beta}} := \|L_\beta \Delta^{-\frac{1}{2}} d^* f\|_{L^1} = \|\Delta^{-\frac{1}{2}} d^* f\|_{H^1_{quad,\beta}}.$$

Remarque 3.9.6. *Remarquons que, si* $\|F\|_{H^1_{quad,\beta}} = 0$, *on a* $\Delta^{-1/2} d^* F = 0$, *et donc*

$$d\Delta^{-1/2}\Delta^{-1/2} d^* F = 0,$$

ce qui impose, avec (3.5), *que* $F = 0$ *car* $F \in H^2(T_\Gamma)$.

Nous pouvons, comme pour les espaces de Hardy de fonctions, effectuer la complétion dans $L^1(T_\Gamma)$.

Théorème 3.9.7. *Soit* (Γ, μ, ρ) *un graphe satisfaisant* (GUE_ρ), (DV_ρ) *et* (LB).
Pour tout $\beta > 0$, *la complétion de* $E^1_{quad,\beta}(T_\Gamma)$ *dans* $L^1(T_\Gamma)$ *existe. Elle sera notée* $H^1_{quad,\beta}(T_\Gamma)$.

3.10 Liens entre les différents espaces de Hardy

Théorème 3.10.1. *Soit* (Γ, μ, ρ) *un graphe satisfaisant* (GUE_ρ), (DV_ρ) *et* (LB). *Soient* $M \in \mathbb{N}^*$, $\epsilon \in (0, +\infty)$ *et* $\beta > 0$.

(a) Nous avons l'égalité (avec normes équivalentes) des espaces de Hardy suivante

$$H^1_{mol,M}(\Gamma) = H^1_{quad,\beta}(\Gamma)$$

dès lors que $M > \frac{d_0}{2}$.

(b) De plus, nous avons l'égalité des espaces de Hardy suivante

$$H^1_{mol,M-\frac{1}{2},\epsilon}(T_\Gamma) = H^1_{quad,\beta}(T_\Gamma)$$

dès lors que $M - \frac{1}{2} > \frac{d_0}{2}$.

(c) Enfin, si (Γ, μ, ρ) *vérifie les estimations ponctuelles* (UE_ρ), *alors on a*

$$H^1_{mol,M}(\Gamma) = H^1_{quad,\beta}(\Gamma)$$

et

$$H^1_{mol,M-\frac{1}{2},\epsilon}(T_\Gamma) = H^1_{quad,\beta}(T_\Gamma)$$

pour tout $M \in \mathbb{N}^*$.

On appelle $H^1(\Gamma)$ l'espace $H^1_{quad,1}(\Gamma)$ (resp. $H^1(T_\Gamma)$ l'espace $H^1_{quad,\frac{1}{2}}(T_\Gamma)$). On utilisera ces notations pour désigner n'importe quel espace égal à $H^1(\Gamma)$ (resp. à $H^1(T_\Gamma)$).

Théorème 3.10.2. *Soit* (Γ, μ, ρ) *un graphe satisfaisant* (GUE_ρ), (DV_ρ) *et* (LB). *Alors la transformée de Riesz* $d\Delta^{-\frac{1}{2}}$ *est continue de* $H^1(\Gamma)$ *dans* $H^1(T_\Gamma)$. *Par conséquent, la transformée de Riesz* $\nabla\Delta^{-\frac{1}{2}}$ *est continue de* $H^1(\Gamma)$ *dans* $L^1(\Gamma)$.

Démonstration: Comme $d^*d = \Delta$, on a

$$\begin{aligned}\|d\Delta^{-\frac{1}{2}} f\|_{H^1(T_\Gamma)} &\simeq \|d\Delta^{-\frac{1}{2}} f\|_{H^1_{quad,1}(T_\Gamma)} = \|\Delta^{-\frac{1}{2}} d^* d\Delta^{-\frac{1}{2}} f\|_{H^1_{quad,1}(\Gamma)} \\ &= \|f\|_{H^1_{quad,1}(\Gamma)} \simeq \|f\|_{H^1(\Gamma)}.\end{aligned}$$

Ainsi, $d\Delta^{-\frac{1}{2}}$ est continue sur H^1. □

Combiné avec le Théorème 3.7.8, on a

Corollaire 3.10.3. *Soit* (Γ, μ, ρ) *un graphe satisfaisant* (UE_ρ), (DV_ρ) *et* (LB). *Alors, la transformée de Riesz* $\nabla\Delta^{-\frac{1}{2}}$ *est continue de* $L^p(\Gamma)$ *dans* $L^p(\Gamma)$.

Remarque 3.10.4. *Dans le cas où* $\rho = d^2$, *ce qui correspond au cas où on a des estimations gaussiennes ponctuelles supérieures sur le noyau* p_l, *ce résultat est prouvé dans [Rus00, Theorem 1]. Nous étendons donc la continuité* L^p, $p \in (1, 2)$, *des transformées de Riesz au cas où* p_l *satisfait des estimations sous-gaussiennes. Nous obtenons ainsi une version limite de [Che14, Proposition 4.2], qui donne la continuité* L^p $(1 < p < 2)$ *des "quasi"-transformées de Riesz, i.e. les opérateurs* $\nabla\Delta^{-\beta}$ *avec* $\beta \in (0, \frac{1}{2})$, *en supposant seulement la propriété de doublement local.*

3.11 Méthode

Réécrivons le théorème de continuité L^p pour les opérateurs de Calderón-Zygmund sans noyau de Blunck et Kunstmann (vu au paragraphe 2.6) avec les notations du présent chapitre.

Théorème 3.11.1. *Supposons que* Γ *satisfasse la propriété de doublement* (DV_ρ) *et prenons* T *un opérateur sous-linéaire continu sur* $L^2(\Gamma)$.

Pour chaque entier $k \in \mathbb{N}^*$, *soit* A_k *un opérateur linéaire agissant sur* $L^2(\Gamma)$.

Supposons encore que pour tout $j \in \mathbb{N}$, *il existe* $\varphi(j) > 0$ *tel que, pour tout entier* $k \in \mathbb{N}^*$, *tout sommet* $x \in \Gamma$ *et toute fonction* f *à support dans* $B(x,k)$, *on ait*

$$\frac{1}{V(x,2^jk)^{\frac{1}{2}}} \|T(I-A_k)f\|_{L^2(C_j(x,k))} \leq \varphi(j)\frac{1}{V(x,k)}\|f\|_{L^1} \tag{3.10}$$

pour tout $j \in \mathbb{N}^*$ *et*

$$\frac{1}{V(x,2^jk)^{\frac{1}{2}}} \|A_kf\|_{L^2(C_j(x,k))} \leq \varphi(j)\frac{1}{V(x,k)}\|f\|_{L^1} \tag{3.11}$$

pour tout $j \in \mathbb{N}$.

Si $\sum_{j\geq 1}\varphi(j)2^{jd} < +\infty$, *avec un* d *vérifiant* (2.7), *alors* T *est de type* $(1,1)$ *faible, et donc continu sur* $L^p(\Gamma)$ *pour tout* $p \in (1,2]$.

Bernicot et Zhao ont montré la variante suivante ([BZ08, Theorem 5.11]) :

Théorème 3.11.2. *Supposons que* Γ *satisfasse la propriété de doublement* (DV) *et prenons* T *un opérateur sous-linéaire continu sur* $L^2(\Gamma)$.

Pour chaque entier $k \in \mathbb{N}^*$, *soit* A_k *un opérateur linéaire agissant sur* $L^2(\Gamma)$.

Supposons encore que pour tout $j \in \mathbb{N}$, *il existe* $\varphi(j) > 0$ *tel que, pour tout entier* $k \in \mathbb{N}^*$, *tout sommet* $x \in \Gamma$ *et toute fonction* f *à support dans* $B(x,k)$, *on ait*

$$\frac{1}{V(x,2^jk)^{\frac{1}{2}}} \|T(I-A_k)f\|_{L^2(C_j(B))} \leq \varphi(j)\frac{1}{V(x,k)^{\frac{1}{2}}}\|f\|_{L^2} \tag{3.12}$$

pour tout $j \in \mathbb{N}^*$ *et*

$$\frac{1}{V(x,2^jk)^{\frac{1}{2}}} \|A_kf\|_{L^2(C_j(B))} \leq \varphi(j)\frac{1}{V(x,k)}\|f\|_{L^1} \tag{3.13}$$

pour tout $j \geq \mathbb{N}$.

Si $\sum_{j\geq 1}\varphi(j)2^{jd} < +\infty$, *avec un* d *vérifiant* (2.7), *alors* T *est continu sur* $L^p(\Gamma)$ *pour tout* $p \in (1,2]$.

Dans notre cas $I - A_k = [I-(I+k\Delta)^{-1}]^M$ (resp. $I - A_k = [I-P^k]^M$). À l'aide de ces familles d'opérateurs, nous avons construit des espaces de Hardy à l'aide de molécules comme dans [BZ08], que nous avons appelés $H^1_{BZ2}(\Gamma)$ (resp. $H^1_{BZ1}(\Gamma)$). Dans [Fen14] et [Fen15c], nous avons utilisé les estimations de Gaffney pour en déduire les estimations L^2-L^2 hors diagonale (3.12) pour les fonctionnelles L_β. Ces estimations sont le principal argument pour montrer que $H^1_{BZ\kappa}(\Gamma) \subset H^1_{quad,\beta}(\Gamma)$, $\kappa \in \{1,2\}$.

L'injection $H^1_{quad,\beta}(\Gamma) \subset H^1_{BZ2}(\Gamma)$ se montre en utilisant la décomposition atomique des espaces de tentes. Néanmoins, on ne peut pas adapter simplement cette méthode pour avoir $H^1_{quad,\beta}(\Gamma) \subset H^1_{BZ1}(\Gamma)$. Pour montrer l'égalité des deux espaces $H^1_{BZ1}(\Gamma)$ et $H^1_{BZ2}(\Gamma)$, sachant que $H^1_{BZ1}(\Gamma) \hookrightarrow H^1_{BZ2}(\Gamma)$, il suffit de prouver l'égalité des duaux. Pour cela, on prouve et on utilise un résultat dans l'esprit de [DY05b, Proposition 2.6].

On définit l'espace $H^1_{quad,\beta}$ de 1-formes de sorte que la transformée de Riesz $d\Delta^{-\frac{1}{2}}$ soit une isométrie de $H^1_{quad,\beta}(\Gamma)$ dans $H^1_{quad,\beta}(T_\Gamma)$.

On peut procéder similairement au cas des espaces de fonctions pour montrer l'égalité des espaces de Hardy de 1-formes différentielles $H^1_{BZ2}(T_\Gamma) = H^1_{quad,\beta}(T_\Gamma)$, ce qui nous permet en particulier d'obtenir l'inclusion $H^1_{quad,\beta}(T_\Gamma) \subset L^1(T_\Gamma)$. La transformée de Riesz $d\Delta^{-\frac{1}{2}}$ est alors continue de $H^1(\Gamma)$ dans $L^1(T_\Gamma)$, et par conséquent $\nabla\Delta^{-\frac{1}{2}}$ est continue de $H^1(\Gamma)$ dans $L^1(\Gamma)$.

L'argument qui nous permet de déduire la continuité $L^2(\Gamma)$ de la continuité H^1-L^1 de la transformée de Riesz est le Théorème 3.7.8. Ce dernier, c'est-à-dire qu'un opérateur sous-linéaire continu de $H^1_{BZ1,M,\epsilon}(\Gamma)$ dans $L^1(\Gamma)$ et sur $L^2(\Gamma)$ est aussi continu sur $L^p(\Gamma)$ pour tout $p \in (1,2)$, peut être montré en supposant une estimation semblable à (3.13), nécessaire pour appliquer le Théorème 5.3 de [BZ08].

3.12 Discussion sur les molécules

Dans ce paragraphe, on considère un graphe (Γ, μ, ρ) satisfaisant (GUE_ρ), (DV_ρ) et (LB).

Si on avait déduit la définition des molécules (pour les espaces de fonctions) en adaptant [AMR08, HM09, HLM+11], on aurait eu :

Définition 3.12.1. *Soit $M \in \mathbb{N}^*$ et $\epsilon \in (0, +\infty)$. Une fonction $a \in L^2(\Gamma)$ est appelée une (HM, M, ϵ)-molécule*[1] *s'il existe un sommet $x \in \Gamma$, un entier $s \in \mathbb{N}^*$ et une fonction $b \in L^2(\Gamma)$ tels que*

(i) $a = [s\Delta]^M b$,

(ii) $\|[s\Delta]^k b\|_{L^2(C_j(x,s))} \leq 2^{-j\epsilon} V_\rho(x, 2^j s)^{-\frac{1}{2}}$, $\forall j \in \mathbb{N}^*$, $\forall k \in [\![0, M]\!]$.

L'espace $H^1_{HM,M,\epsilon}(\Gamma)$ est ensuite défini de la même façon que $H^1_{BZ\kappa,M,\epsilon}(\Gamma)$.

En utilisant les méthodes employées dans [HLM+11] et [Fen14] (et [Fen15c]), on peut prouver que si $M > \frac{d_0}{2}$ (ou si $M \in \mathbb{N}^*$ si on suppose la condition plus forte (UE_ρ)), il y a égalité entre les espaces $H^1_{HM,M,\epsilon}(\Gamma)$ et $H^1_{quad,1}(\Gamma) = H^1(\Gamma)$. Par conséquent, cette autre définition est équivalente à la nôtre.

Cependant, en utilisant notre définition des molécules, on explicite les espaces préduaux de tous les espaces BMO que l'on introduits. Ainsi les opérateurs $(I - P^k)^M$ et $(I - (I + s\Delta)^{-1})^M$ apparaissent à la fois dans la définition des espaces BMO et la définition des espaces de Hardy H^1_{mol}. De plus, donner une définition dans l'esprit 3.12.1 des molécules pour les espaces de Hardy de 1-formes n'est pas clair.

Des espaces de Hardy ont déjà été introduits sur les graphes par Bui et Duong (cf [BD14]) de la manière suivante :

1. La notation HM fait référence à l'article [HM09] de Hofmann et Mayboroda.

Définition 3.12.2. *Soit $M \in \mathbb{N}^*$ et $\epsilon \in (0, +\infty)$. Une fonction $a \in L^2(\Gamma)$ est appelée une (BD, M, ϵ)-molécule s'il existe une boule B de rayon r (pour la distance d) et une fonction $b \in L^2(\Gamma)$ telles que*

(i) $a = [r\Delta]^M b$,

(ii) $\|[r\Delta]^k b\|_{L^2(C_j(B))} \leq 2^{-j\epsilon} V_d(2^j B)^{-\frac{1}{2}}$, $\forall j \in \mathbb{N}^*$, $\forall k \in [\![0, M]\!]$.

L'espace $H^1_{BD,M,\epsilon}(\Gamma)$ est ensuite défini de la même façon que $H^1_{BZ\kappa,M,\epsilon}(\Gamma)$.

Les résultats de [BD14] supposent toujours l'estimation (UE_{d^2}) où d est la distance classique définie au paragraphe 2.1. Sous cette estimation, la Définition 3.12.1 devient :

Définition 3.12.3. *Soit $M \in \mathbb{N}^*$ et $\epsilon \in (0, +\infty)$. Une fonction $a \in L^2(\Gamma)$ est appelée une (HM, M, ϵ)-molécule s'il existe une boule B de rayon r (pour la distance d) et une fonction $b \in L^2(\Gamma)$ telles que*

(i) $a = [r^2\Delta]^M b$,

(ii) $\|[r^2\Delta]^k b\|_{L^2(C_j(B))} \leq 2^{-j\epsilon} V_d(2^j B)^{-\frac{1}{2}}$, $\forall j \in \mathbb{N}^*$, $\forall k \in [\![0, M]\!]$.

L'espace $H^1_{HM,M,\epsilon}(\Gamma)$ est ensuite défini de la même façon que $H^1_{BZ\kappa,M,\epsilon}(\Gamma)$.

et diffère donc de la Définition 3.12.2 car on a remplacé r par r^2 dans les conditions (i) et (ii). Les espaces $H^1_{BD,M,\epsilon}(\Gamma)$ sont donc seulement inclus dans les espaces $H^1_{HM,M,\epsilon}(\Gamma)$ et nous ne savons pas si l'inclusion

$$H^1_{HM,M,\epsilon}(\Gamma) \subset H^1_{BD,M,\epsilon}(\Gamma)$$

est vraie.
On rappelle que l'équivalence des différentes définitions des espaces de Hardy dans [Fen14] sont valables sans aucune hypothèse de majoration ponctuelle pour les itérées du noyau de P.

Chapitre 4

Espaces de Besov sur les groupes de Lie

Dans ce chapitre, nous présentons les résultats obtenus dans l'article [Fen15a] (rappelé dans le chapitre E). Nous commencerons par donner les définitions utiles sur les groupes de Lie unimodulaires. Ensuite, nous énoncerons une définition des espaces de Besov sur les groupes de Lie et nous donnerons des définitions équivalentes et des résultats d'interpolation. Puis, nous présenterons deux approches pour montrer la propriété d'algèbre des espaces de Besov : la première en utilisant des fonctionnelles "de Strichartz" utilisant des différences de fonctions et la seconde utilisant des paraproduits.

On utilisera la notation suivante : si $n \in \mathbb{N}$, on définit $\mathcal{I}_\infty := \bigcup_{l \leq \infty} \{1, \ldots, k\}^l$. Puis si $I = (i_1, \ldots, i_n) \in \mathcal{I}_\infty$, la longueur de I, notée $|I|$ désignera l'entier n.

4.1 Estimations sur le noyau de la chaleur

Dans tout ce chapitre, G sera un groupe de Lie réel connexe unimodulaire. Nous reprenons les notations du paragraphe 1.3.2 du chapitre 1.

Grâce à l'invariance à gauche de Δ et à l'hypoellipticité de $\partial_t + \Delta$, l'opérateur de la chaleur H_t a un noyau de convolution $C^\infty(G)$, que l'on appellera h_t, vérifiant, pour tout $t > 0$ et tout $x \in G$,

$$H_t f(x) = \int_G h_t(y^{-1}x) f(y) dy = \int_G h_t(y) f(xy) dy$$

où la seconde égalité est due à la symétrie de h_t. Nous avons les estimations suivantes sur le noyau h_t (cf [VSCC92, Chapter V, Theorems V.4.2 et V.4.3]) :

Proposition 4.1.1. *Pour tout $I \in \mathcal{I}_\infty$, il existe $C_I, c_I > 0$ telles que pour tout $x \in G$ et tout $t \in (0,1]$, on a*

$$|X_I h_t(x)| \leq \frac{C_I}{t^{\frac{|I|}{2}} V(\sqrt{t})} \exp\left(-c_I \frac{|x|^2}{t}\right).$$

Nous en déduisons le résultat suivant (cf [Fen15a]) :

Proposition 4.1.2. *Pour tout $p \in [1, +\infty]$, tout $I \in \mathcal{I}_\infty(\mathbb{N})$ et tout $t \in (0,1)$, on a*

$$\|X_I H_t f\|_p \leq C_I t^{-\frac{|I|}{2}} \|f\|_p \qquad \forall f \in L^p(G).$$

Remarque 4.1.3. *Soit $m \in \mathbb{N}$. On en déduit en particulier que $\|(t\Delta)^m H_t f\|_p \leq C_m$ pour tous $t \in (0,1)$ et $p \in [1,+\infty]$. Dans le cas $p \in (1,+\infty)$, ce résultat est une conséquence de l'analyticité de Δ sur $L^p(G)$, donnant même que*

$$\|(t\Delta)^m H_t f\|_p \leq C_m \qquad \forall t > 0.$$

4.2 Définition des espaces de Besov

Nous avons introduit dans [Fen15a] la définition des espaces de Besov. Pour cela, nous définissons d'abord l'espace des fonctions C^∞ à décroissance rapide.

Définition 4.2.1. *On définit l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(G)$ comme l'espace des fonctions $\varphi \in C^\infty(G)$ pour lesquelles toutes les semi-normes*

$$N_{c,I}(\varphi) = \sup_{x \in G} e^{c|x|}|X_I\varphi(x)| \qquad c \in \mathbb{N},\, I \in \mathcal{I}_\infty \tag{4.1}$$

sont finies.

L'espace $\mathcal{S}'(G)$ est ensuite défini comme étant le dual de $\mathcal{S}(G)$.

Remarque 4.2.2. *Relevons que nous avons les inclusions continues $\mathcal{S}(G) \subset L^p(G)$ pour n'importe quel $p \in [1,+\infty]$. Par conséquent, pour tout $p \in [1,+\infty]$, $L^p(G) \subset \mathcal{S}'(G)$.*

Remarque 4.2.3. *Le facteur $e^{c|x|}$ dans l'expression des semi-normes précédentes est dû au fait que l'on considère des groupes à croissance au plus exponentielle et permet de garantir l'inclusion de $\mathcal{S}(G)$ dans $L^p(G)$ pour tout $1 < p < +\infty$ (la définition est donc différente de celle de [FMV06] où seul le cas de la croissance polynomiale est considéré).*

Remarque 4.2.4. *Pour tout $t > 0$ et tout $I \in \mathcal{I}_\infty$, $X_I h_t \in \mathcal{S}(G)$. En effet, la Proposition 4.1.1 implique que $X_I h_t \in \mathcal{S}(G)$ pour $t \in (0,1)$ et $I \in \mathcal{I}_\infty$. Le cas $t \geq 1$ est dû au fait que $\mathcal{S}(G) * \mathcal{S}(G) \subset \mathcal{S}(G)$.*

Remarque 4.2.5. *La Remarque précédente nous donne que $H_t X_I \varphi \in \mathcal{S}(G)$ dès que $t > 0$, $\varphi \in \mathcal{S}(G)$ et $I \in \mathcal{I}_\infty$. Quand $f \in \mathcal{S}'(G)$, alors pour tout $t > 0$ et tout $I \in \mathcal{I}_\infty$, $X_I H_t f$ est défini comme la distribution dans $\mathcal{S}'(G)$ donnée par*

$$\langle X_I H_t f, \varphi\rangle := \langle f, H_t X_I \varphi\rangle \qquad \forall \varphi \in \mathcal{S}(G).$$

Nous avons prouvé la formule reproduisante de Calderón-Zygmund suivante :

Lemme 4.2.6. *Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(G)$ et tout $f \in \mathcal{S}'(G)$, nous avons les identités suivantes :*

$$\varphi = \frac{1}{(m-1)!}\int_0^1 (t\Delta)^m H_t \varphi \frac{dt}{t} + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!}\Delta^k H_1 \varphi$$

où l'intégrale converge dans $\mathcal{S}(G)$, et par dualité

$$f = \frac{1}{(m-1)!}\int_0^1 (t\Delta)^m H_t f \frac{dt}{t} + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!}\Delta^k H_1 f$$

où l'intégrale converge dans $\mathcal{S}'(G)$.

Définition 4.2.7. *Soient $\alpha \geq 0$ et $p, q \in [1, +\infty]$. L'espace $B_\alpha^{p,q}(G)$ est défini comme l'espace des distributions $f \in \mathcal{S}'(G)$ vérifiant*

$$\|f\|_{B_\alpha^{p,q}} := \Lambda_\alpha^{p,q} f + \|H_{\frac{1}{2}} f\|_p < +\infty,$$

où

$$\Lambda_\alpha^{p,q} f := \left(\int_0^1 \left(t^{m-\frac{\alpha}{2}} \left\| \Delta^m H_t f \right\|_p \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}}$$

(avec la modification usuelle si $q = +\infty$) et m est l'unique entier vérifiant $\frac{\alpha}{2} < m \leq \frac{\alpha}{2} + 1$.

4.3 Normes équivalentes

Le résultat suivant donne des normes équivalentes à la norme $B_\alpha^{p,q}$, qui s'expriment uniquement en termes de l'opérateur Δ et ne font pas intervenir explicitement les champs de vecteurs X_i. Sa preuve n'utilise que le fait que $\|(t\Delta)^m H_t f\|_p \leq C_m$ pour tout $t \in (0, 1)$ et $p \in [1, +\infty]$.

Théorème 4.3.1. *Soient $\alpha \geq 0$ et $p, q \in [1, +\infty]$.*

Si $m > \frac{\alpha}{2}$ est un entier et t_0 est un réel dans $\begin{cases} (0,1) & \text{si } \alpha = 0 \\ [0,1) & \text{si } \alpha > 0 \end{cases}$, alors les normes suivantes sont équivalentes à la norme de $B_\alpha^{p,q}(G)$:

(i) $\displaystyle \left(\int_0^1 \left(t^{m-\frac{\alpha}{2}} \left\| \Delta^m H_t f \right\|_p \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} + \|H_{t_0} f\|_p,$

(ii) $\displaystyle \|H_{t_0} f\|_p + \left(\sum_{j \leq -1} \left[2^{j(m-\frac{\alpha}{2})} \|\Delta^m H_{2^j} f\|_p \right]^q \right)^{\frac{1}{q}},$

(iii) $\displaystyle \|H_{t_0} f\|_p + \left(\sum_{j \leq -1} \left[2^{-j\frac{\alpha}{2}} \left\| \int_{2^j}^{2^{j+1}} |(t\Delta)^m H_t f| \frac{dt}{t} \right\|_p \right]^q \right)^{\frac{1}{q}}$

si on suppose la condition supplémentaire $\alpha > 0$.

Remarque 4.3.2. *Ici et dans la suite, "une norme N est équivalente à la norme de $B_\alpha^{p,q}(G)$" si et seulement si l'espace des distributions $f \in \mathcal{S}'(G)$ telles que $N(f) < +\infty$ coïncide avec $B_\alpha^{p,q}(G)$ et la norme N est équivalente à $\|\cdot\|_{B_\alpha^{p,q}}$.*

Remarque 4.3.3. *Le Lemme 4.2.6 nous donne la décomposition de Littlewood-Paley suivante pour toute $f \in \mathcal{S}'(G)$:*

$$f = g + \sum_{j \leq -1} f_j$$

avec

$$g = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} \Delta^k H_1 f$$

et pour tout $j \leq -1$

$$f_j = \frac{1}{(m-1)!} \int_{2^j}^{2^{j+1}} (t\Delta)^m H_t f \frac{dt}{t}.$$

On notera toutefois que la norme de f dans $B_\alpha^{p,q}(G)$ n'est pas définie comme

$$\|f\|_{\tilde{B}_\alpha^{p,q}} := \|g\|_p + \left(\sum_{j\le -1} \left[2^{-j\frac{\alpha}{2}}\|f_j\|_p\right]\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{4.2}$$

et nous ne savons pas si $\|f\|_{B_\alpha^{p,q}(G)}$ est équivalente à la norme donnée par (4.2)*.*

Le prochain résultat est une autre caractérisation des espaces de Besov, utilisant explicitement la famille de champs de vecteurs $\mathbb{X}$.

Théorème 4.3.4. *Soient $p, q, \in [1, +\infty]$ et $\alpha > 0$. Soit $\bar{m} > \alpha$ un entier. Alors*

$$\|H_{\frac{1}{2}} f\|_p + \left(\sum_{j\le -1} \left[2^{j\frac{\bar{m}-\alpha}{2}} \max_{t\in[2^j,2^{j+1}]} \sup_{|I|\le \bar{m}} \|X_I H_t f\|_p\right]^q\right)^{\frac{1}{q}} \tag{4.3}$$

est une norme équivalente à celle de $B_\alpha^{p,q}(G)$.

4.4 Plongement et interpolation

Le Théorème 4.3.1 nous permet d'étendre aux groupes de Lie unimodulaires des résultats de plongement et d'interpolation pour les espaces de Besov dans $\mathbb{R}^d$.

Corollaire 4.4.1. *Soient $p, q, r \in [1, +\infty]$ et $\alpha \ge 0$.*
Nous avons l'injection continue suivante

$$B_\alpha^{p,q}(G) \subset B_\alpha^{p,r}(G)$$

dès que $q \le r$.

Corollaire 4.4.2. *Soient $s_0, s_1 \ge 0$, $1 \le p_0, p_1, q_0, q_1 \le \infty$ et $\theta \in (0, 1)$.*
Définissons

$$s^* = (1-\theta)s_0 + \theta s_1$$
$$\frac{1}{p^*} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$$
$$\frac{1}{q^*} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

Les espaces de Besov forment une échelle d'interpolation pour la méthode complexe, c'est-à-dire, si $s_0 \ne s_1$,

$$(B_{s_0}^{p_0,q_0}, B_{s_1}^{p_1,q_1})_{[\theta]} = B_{s^*}^{p^*,q^*}.$$

4.5 Propriété d'algèbre : approche par une fonctionnelle aux différences finies

Lorsque $\alpha \in (0, 1)$, on obtient une caractérisation supplémentaire des espaces $B_\alpha^{p,q}(G)$ à l'aide d'une fonctionnelle définie par différences de fonctions.

Pour toute fonction f sur G et tous $x, y \in G$, définissons $\nabla_y f(x) := f(xy) - f(x)$. Considérons la fonctionnelle $L_\alpha^{p,q}(f)$ définie pour toute fonction f sur G par

$$L_\alpha^{p,q}(f) := \left(\int_{|y|\le 1} \left(\frac{\|\nabla_y f\|_p}{|y|^\alpha}\right)^q \frac{dy}{V(|y|)}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Théorème 4.5.1. *Soient $p, q, \in [1, +\infty]$ et $\alpha \in (0, 1)$. Alors, pour tout $f \in L^p(G)$,*

$$L_\alpha^{p,q}(f) + \|f\|_p \simeq \Lambda_\alpha^{p,q}(f) + \|f\|_p.$$

Remarque 4.5.2. *Lorsque G est à croissance polynomiale, le Théorème 4.5.1 est montré dans [GS12, Proposition 3.1]. On a en fait, dans ce cas, une version homogène de la conclusion du théorème 4.5.1 :*

$$\Lambda_\alpha^{p,q}(f) \sim \left(\int_{y \in G} \left(\frac{\|\nabla_y f\|_p}{|y|^\alpha} \right)^q \frac{dy}{V(|y|)} \right)^{\frac{1}{q}}$$

pour toute $f \in C_0^\infty(G)$ (voir [SC90, Théorème 2]). Le théorème 4.5.1 étend donc celui de Gallagher et Sire au cas des groupes de Lie réel s connexes unimodulaires (donc à croissance polynomiale ou exponentielle).

Du théorème précédent, on déduit une règle de Leibniz pour les espaces de Besov $B_\alpha^{p,q}(G)$ lorsque $\alpha \in (0, 1)$.

Théorème 4.5.3. *Soit $\alpha \in (0, 1)$. Nous avons la règle de Leibniz suivante.*
Si $p_1, p_2, p_3, p_4, p, q \in [1, +\infty]$ sont tels que

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_4} = \frac{1}{p},$$

alors pour tout $f \in B_\alpha^{p_1,q}(G) \cap L^{p_3}(G)$ et tout $g \in B_\alpha^{p_4,q}(G) \cap L^{p_2}(G)$, on a

$$\|fg\|_{B_\alpha^{p,q}} \lesssim \|f\|_{B_\alpha^{p_1,q}} \|g\|_{L^{p_2}} + \|f\|_{L^{p_3}} \|g\|_{B_\alpha^{p_4,q}}.$$

Démonstration: D'abord, on remarque que

$$\nabla_y (f \cdot g)(x) = g(xy) \cdot \nabla_y f(x) + f(x) \cdot \nabla_y g(x).$$

La règle de Leibniz est ensuite la conséquence immédiate de l'inégalité de Hölder et du Théorème 4.5.1. □

4.6 Caractérisation récursive des espaces de Besov

Comme les espaces de Bessel, les espaces de Besov peuvent être caractérisés récursivement.

Théorème 4.6.1. *Soient $p, q \in [1, +\infty]$ et $\alpha > 0$. Alors*

$$f \in B_{\alpha+1}^{p,q}(G) \Leftrightarrow \forall i,\ X_i f \in B_\alpha^{p,q}(G) \text{ et } f \in L^p(G).$$

De plus,

$$\|f\|_{B_{\alpha+1}^{p,q}} \simeq \|f\|_{L^p} + \sum_{i=1}^{k} \|X_i f\|_{B_\alpha^{p,q}}.$$

Remarque 4.6.2. *Si G est nilpotent (donc à croissance polynomiale), une version du théorème 4.6.1 pour $1 < p < +\infty$ est montrée dans [GS12, Proposition 4.1] pour les espaces de Besov homogènes (la restriction sur p est due à l'utilisation de la continuité L^p des transformées de Riesz dans la preuve de [GS12, Proposition 4.1]). La conclusion du théorème 4.6.1 (i.e. dans le cas des espaces de Besov inhomogènes) est montrée dans [GS12, Paragraphe 3.2] quand G est à croissance polynomiale et $1 < p < +\infty$. La conclusion du théorème 4.6.1, qui ne concerne que le cas des espaces de Besov inhomogènes, est valable pour tout groupe unimodulaire et pour tout $p \in [1, +\infty]$.*

Dans notre preuve du théorème 4.6.1, nous estimons les termes faisant intervenir la différentiation X_i à l'aide de la Proposition 4.1.2, valide pour tout $p \in [1, +\infty]$.

Remarque 4.6.3. *On pourrait espérer que la méthode utilisée dans [CRTN01] pour déduire la règle de Leibniz pour $\alpha > 1$ du cas $\alpha \in (0, 1)$ dans le cas des espaces de Bessel puisse être adaptée. Cependant, nous n'avons pas réussi à montrer des inégalités multiplicatives appropriées entre les espaces L^p et les espaces de Besov (similaires à [CRTN01, Proposition 31]). Par ailleurs, la proposition 3.4 de [GS12] énonce une règle de Leibniz pour les espaces de Besov homogènes dans le cas où G est à croissance polynomiale. Toutefois, la preuve, qui utilise la caractérisation récursive des espaces de Besov inhomogène, nous semble donner en fait l'estimation*

$$\|fg\|_{B_\alpha^{p,q}} \lesssim (\|f\|_{B_\alpha^{p,q}} + \|f\|_{L^\infty})(\|g\|_{B_\alpha^{p,q}} + \|g\|_{L^\infty})$$

.

4.7 Propriété d'algèbre : approche par les paraproduits

Nous allons utiliser des paraproduits faisant intervenir le semi-groupe H_t, inspirés par [Ber12]. Cependant, nous allons légèrement modifier la définition trouvée dans [Ber12] pour tenir compte du fait que la croissance du volume des boules de G peut être exponentielle, alors que les résultats de [Ber12] ne concernent que le cas où le volume des boules vérifie la propriété de doublement.

Pour tout $t > 0$, on définit

$$\phi_t(\Delta) = -\sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!}(t\Delta)^k H_t,$$

et on observe que la dérivée de $t \mapsto \phi_t(\Delta)$ est donnée par

$$\phi_t'(\Delta) = \frac{1}{(m-1)!}\frac{1}{t}(t\Delta)^m H_t := \frac{1}{t}\psi_t(\Delta).$$

Le produit ponctuel de deux fonctions peut alors se décomposer comme une somme de trois paraproduits.

Proposition 4.7.1. *Soient $p, q, r \in [1, +\infty]$ avec $\frac{1}{r} := \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1$ et $(f, g) \in L^p(G) \times L^q(G)$.*

On a l'identité

$$fg = \Pi_f(g) + \Pi_g(f) + \Pi(f,g) - \phi_1(\Delta)[\phi_1(\Delta)f \cdot \phi_1(\Delta)g] \qquad [\textit{dans } \mathcal{S}'(G).$$

où

$$\Pi_f(g) = \int_0^1 \phi_t(\Delta)[\psi_t(\Delta)f \cdot \phi_t(\Delta)g]\frac{dt}{t},$$
$$\Pi_g(f) = \int_0^1 \phi_t(\Delta)[\phi_t(\Delta)f \cdot \psi_t(\Delta)g]\frac{dt}{t}$$

et

$$\Pi(f,g) = \int_0^1 \psi_t(\Delta)[\phi_t(\Delta)f \cdot \phi_t(\Delta)g]\frac{dt}{t}$$

sont trois éléments de $\mathcal{S}'(G)$.

Nous avons les estimations suivantes sur les paraproduits dans les espaces de Besov.

Proposition 4.7.2. *Soient* $\alpha > 0$ *et* $p, p_1, p_2, q \in [1, +\infty]$ *tels que*

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{p}.$$

Alors pour tout $f \in B_\alpha^{p_1,q}(G)$ *et tout* $g \in L^{p_2}(G)$, *on a*

$$\Lambda_\alpha^{p,q}[\Pi_f(g)] \lesssim \|f\|_{B_\alpha^{p_1,q}} \|g\|_{L^{p_2}}.$$

Proposition 4.7.3. *Soient* $\alpha > 0$ *et* $p, p_1, p_2, p_3, p_4, q \in [1, +\infty]$ *tels que*

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_4} = \frac{1}{p}.$$

Alors, pour tout $f \in B_\alpha^{p_1,q}(G) \cap L^{p_3}(G)$ *et tout* $g \in B_\alpha^{p_4,q}(G) \cap L^{p_2}(G)$, *on a*

$$\Lambda_\alpha^{p,q}[\Pi(f,g)] \lesssim \|f\|_{B_\alpha^{p_1,q}} \|g\|_{L^{p_2}} + \|f\|_{L^{p_3}} \|g\|_{B_\alpha^{p_4,q}}.$$

Nous en déduisons alors la règle de Leibniz pour les espaces de Besov $B_\alpha^{p,q}(G)$ pour tout $\alpha > 0$.

Théorème 4.7.4. *Soient* $\alpha > 0$ *et* $p, p_1, p_2, p_3, p_4, q \in [1, +\infty]$ *tels que*

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_4} = \frac{1}{p}.$$

Alors, pour tout $f \in B_\alpha^{p_1,q}(G) \cap L^{p_3}(G)$ *et tout* $g \in B_\alpha^{p_4,q}(G) \cap L^{p_2}(G)$, *on a*

$$\|fg\|_{B_\alpha^{p,q}} \lesssim \|f\|_{B_\alpha^{p_1,q}} \|g\|_{L^{p_2}} + \|f\|_{L^{p_3}} \|g\|_{B_\alpha^{p_4,q}}.$$

La preuve de la Proposition 4.7.2 utilise principalement la Proposition 4.1.2. Pour la Proposition 4.7.3, on utilise l'estimation

$$\|\Delta^m [f \cdot g]\|_{L^p} \lesssim \sum_{k=0}^{2m} \sup_{|I_1|=k} \sup_{|I_2|=2m-k} \|X_{I_1} f \cdot X_{I_2} g\|_{L^p},$$

qui nous permet de conclure en utilisant, en plus de la Proposition 4.1.2, le Théorème 4.3.4 et l'interpolation donnée par le Corollaire 4.4.2.

Remarque 4.7.5. *Dans le cas de $\mathbb{R}^d$, les espaces de Besov homogènes $\dot{B}^{p,q}_{\alpha}$ sont, en général, des espaces de distributions définies modulo les polynômes (voir le paragraphe 1.3.1 dans le chapitre 1). Cette définition peut être étendue au cas des groupes de Carnot ([FM12]). Une autre définition possible des espaces de Besov homogènes consiste à imposer une condition de limite nulle dans la décomposition de Littlewood Paley (voir [GS12, Paragraph 2.2]). Toutefois, même en adoptant ce point de vue, nous ne savons pas montrer l'analogue des résultats énoncés dans le présent chapitre pour les espaces de Besov homogènes dans le cas des groupes de Lie unimodulaires, car les preuves semblent nécessiter des estimations ponctuelles de h_t pour tout $t > 0$ qui ne sont pas vérifiées en toute généralité. Notons que, dans [CRTN01], les résultats pour des espaces de Bessel homogènes sont obtenus uniquement dans le cas des groupes de Lie à croissance polynomiale.*
Dans [BDY12], Bui, Duong et Yan construisent des espaces de Besov homogènes $B^{p,q}_{\alpha}(X)$ pour $p, q \in [1, +\infty]$, $\alpha \in (-1, 1)$ et X un espace métrique mesuré satisfaisant une condition de croissance polynomiale à l'infini. De plus, ils donnent les formules reproduisantes de Calderón correspondantes. Il est possible que l'on puisse étendre leurs résultats pour construire des espaces de Besov homogènes sur un groupe de Lie même quand $\alpha \notin (-1, 1)$.

Chapitre 5

Perspectives

5.1 Fonctionnelles de Littlewood-Paley

Soit Γ un graphe connexe localement uniformément fini, comme dans le chapitre 2. On a vu dans ce chapitre que les fonctionnelles de Littlewood-Paley g_β^d et $\tilde{g}_\beta^d$ sont continues sur $L^p(\Gamma)$ pour $1 < p < 2$ et de type $(1,1)$ faible si on suppose la mesure doublante et une majoration gaussienne ponctuelle du noyau p_k.

- Peut-on montrer les mêmes résultats en supposant seulement une majoration sous-gaussienne de p_k ? La preuve présentée dans le chapitre 2 ne semble pas s'adapter. L'adaptation semble nécessiter des estimations L^2 Gaffney pour ∇P^k. Cependant, on ne sait montrer que des estimations L^p Gaffney pour ∇P^k avec $p \in (1,2)$.
  Une autre approche possible serait d'adapter les méthodes de [ALM14], qui permettent, de façon très générale, de passer de la continuité de g_1^d à celle de g_β^d.
- Pour $p > 2$, on montre la continuité de g_β^d et $\tilde{g}_\beta^d$ sur L^p en supposant, en plus des hypothèses déjà faites pour le cas $p < 2$, une inégalité de Poincaré L^2 sur les boules et une borne uniforme dans L^q pour $\sqrt{l}\nabla P^l$ pour un $q > 2$. Peut-on affaiblir l'hypothèse sur l'inégalité de Poincaré ? Un travail récent sur la continuité des transformées de Riesz ([BF15]) suggère qu'on pourrait remplacer l'inégalité de Poincaré L^2 par une inégalité L^q pour un $q > 2$.

5.2 Transformées de Riesz

On considère à nouveau un graphe Γ comme dans le paragraphe 5.1. On dit que (R_p) est vérifiée si la transformée de Riesz est continue sur $L^p(\Gamma)$, i.e.

$$\|\nabla \Delta^{-\frac{1}{2}} f\|_{L^p} \lesssim \|f\|_{L^p}. \tag{R_p}$$

On dit que (GG_p) est vérifiée si

$$\|\nabla P^{k-1} f\|_{L^p} \lesssim k^{-\frac{1}{2}} \|f\|_{L^p} \qquad \forall k \in \mathbb{N}^*. \tag{GG_p}$$

Dans le cas des graphes, le résultat suivant a été établi (cf [BR09, Theorem 1.4], et [ACDH04, Theorem 1.3] pour un analogue dans le cadre des variétés riemanniennes) :

Théorème 5.2.1. *Soit* (Γ,μ) *un graphe vérifiant* (DV)*,* (UE_{d^2})*,* (P_2) *et* (LB_2)*. Soit* $q \in (2,+\infty]$*. Les assertions suivantes sont équivalentes* *(i)* (R_p) *est vraie pour tout* $p \in (2, q)$,

(ii) (GG_p) *est vraie pour tout* $p \in (2, q)$.

Le fait que (R_p) implique (GG_p) est immédiat avec l'analyticité de P sur L^p, et ne nécessite aucune des hypothèses (DV), (UE_{d^2}), (P_2). Sous l'hypothèse (DV), l'implication réciproque a été affaiblie[1] en $(GG_q) + (P_q)$ implique (R_p) pour tout $p \in (2, q)$ (voir la remarque après le Theorem 1.1 dans [BF15]).

- Peut-on se passer complètement des inégalités de Poincaré dans le Théorème 5.2.1 ? Dans le cadre continu, une réponse a été apportée par Bernicot et Frey dans l'article [BF15] en remplaçant les inégalités de Poincaré par des inégalités de Hölder inverse pour les fonctions harmoniques. Peut-on donner un résultat analogue sur un graphe ?
- Que se passe-t-il pour (R_p) lorsque $p > 2$ si on suppose des estimations sous-gaussiennes ? La conjonction de (DV), de la minoration (LB_2) et de l'inégalité de Poincaré L^2 sur les boules est équivalente à la conjonction de la majoration et de la minoration gaussiennes de p_k ([Del99, Theorem 1.7]). Une solution dans le cas sous-gaussien pourrait être de remplacer l'inégalité de Poincaré (P_2) par des estimations ponctuelles sous-gaussiennes supérieures *et* inférieures du noyau de Markov, de manière similaire à ce qu'a fait Chen dans [Che14, Theorem 2.15] dans le cadre des variétés riemanniennes.
- Dans le cas sous-gaussien, nous obtenons la continuité L^p de la transformée de Riesz pour $1 < p < 2$, mais notre approche, qui passe par des espaces de Hardy, ne permet pas de montrer que la transformée de Riesz est de type $(1, 1)$ faible. Il serait intéressant de montrer ce dernier résultat. Rappelons que, sous des estimations gaussiennes ponctuelles supérieures (UE) (équivalentes à (UE_{d^2})), $\nabla\Delta^{-\frac{1}{2}}$ est de type $(1, 1)$ faible ([Rus00, Theorem 1]). De plus, Chen a prouvé dans sa thèse [Che14] que les quasi-transformées de Riesz $\nabla\Delta^{-\alpha}$ sont de type $(1, 1)$ faible dès que l'on a des estimations sous-gaussiennes ponctuelles.
- La construction d'espaces de Hardy associés au laplacien discret nous a permis de montrer la continuité L^p de la transformée de Riesz pour $1 < p < 2$, en supposant qu'il existe une quasidistance ρ pour laquelle (Γ, μ, ρ) satisfait (UE_ρ) et (DV_ρ). Existe-t-il toujours une telle quasidistance ? Une façon de la construire pourrait être de procéder comme Grigor'yan et Telcs dans [GT01] en définissant la métrique à partir du noyau de Green. Cependant, cette méthode semble liée à des estimations sous-gaussiennes inférieures, ce qui la rend difficilement applicable dans un contexte général.
- Peut-on montrer la continuité L^p des transformées de Riesz $(1 < p < 2)$ sans supposer (DV) ? Des résultats de cet ordre existent pour les transformées de Riesz "locales" $\nabla(\Delta + \alpha\mathrm{Id})^{-1/2}$ dans le cas des variétés riemanniennes ([ACDH04, Theorem 1.6]), et une hypothèse de minoration du spectre L^2 du laplacien permet d'obtenir la continuité L^p pour $\nabla\Delta^{-1/2}$. On rappelle également que des résultats de continuité L^p pour les transformées de Riesz dans certains groupes de Lie à croissance exponentielle ont été obtenus dans [Sjö99, SV08] pour le groupe affine ou des produits semi-directs de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}_+$. Les preuves reposent toutefois de manière importante sur la structure de produit.

1. Dans le cadre des variétés mais le cas des graphes ne pose pas de difficulté.

5.3 Propriétés d'algèbre pour des espaces de Bessel et des espaces de Besov

- Comme précisé dans l'introduction, la continuité L^p des fonctionnelles de Littlewood-Paley discrètes sur un graphe vérifiant des hypothèses convenables permet de montrer des propriétés d'algèbre, et plus généralement une règle de Leibniz pour des espaces de Bessel sur un graphe. Ces résultats sont l'analogue discret de ceux de [CRTN01, BBR12]. La nouvelle approche des estimées du noyau de la chaleur développée dans [BCF14] devrait toutefois permettre d'améliorer ces résultats.
- Peut-on étendre les résultats du chapitre 4 au cas des espaces de Besov homogènes sur les groupes de Lie à croissance polynomiale ? La propriété d'algèbre pour les espaces de Besov homogènes n'est connue que pour les groupes de Lie nilpotents et le résultat n'est pas exactement la généralisation de celui de $\mathbb{R}^d$ ([GS12, Theorem 2]). Comme nous l'avons indiqué à la fin du chapitre 4, ces espaces posent un problème de définition. Les espaces de Besov homogènes dans $\mathbb{R}^d$ sont des espaces de distributions modulo les polynômes, et cette définition semble difficile à étendre au-delà du cas des groupes de Carnot. On peut espérer que la définition des espaces de Besov homogènes donnée dans [BDY12] (qui traite le cas $\alpha \in (-1,1)$ sur des espaces mesurés très généraux) puisse être étendue à $\alpha \geq 1$.
- Peut-on étendre les résultats du chapitre 4 au cas des variétés riemanniennes (ou plus généralement des espaces métriques munis d'une forme de Dirichlet) ou des graphes ? Le cas des espaces de Bessel a été traité dans le cadre des variétés riemanniennes dans [BBR12]. Des questions analogues peuvent être posées pour les espaces de Triebel-Lizorkin.
- Soit (M,μ,d) un espace métrique mesuré vérifiant la propriété de doublement. Soit L un opérateur autoadjoint positif sur $L^2(M)$ à domaine dense tel que e^{-tL} admette un noyau h_t vérifiant des estimations ponctuelles supérieures gaussiennes. Supposons que L définisse un carré au champ $\mathcal{E}$, on note $\nabla f = \mathcal{E}(f,f)^{\frac{1}{2}}$. Sous ces conditions, Bernicot, Coulhon, Frey montrent (cf [BCF15]) que l'uniforme continuité $L^p(M)$ du gradient du semigroupe $\sqrt{t}\nabla e^{-t\Delta}$ (et donc la continuité L^p de la transformée de Riesz $\nabla\Delta^{-\frac{1}{2}}$) entraîne que, pour tout $\alpha \in (0,1)$, $\dot{L}^p_\alpha(M) \cap L^\infty(M)$ est une algèbre pour le produit ponctuel, c'est-à-dire que
$$\|\Delta^{\alpha/2}(fg)\|_p \lesssim \|\Delta^{\alpha/2} f\|_p \|g\|_{L^\infty} + \|f\|_{L^\infty}\|\Delta^{\alpha/2} g\|_p.$$
Peut-on se passer de l'hypothèse sur l'estimation gaussienne ponctuelle de h_t ? Dans le cas positif, et avec nos travaux sur la continuité de la transformée de Riesz sous des hypothèses sous-gaussiennes [2] , cela permettrait d'étendre la propriété d'algèbre de $\dot{L}^p_\alpha(M) \cap L^\infty(M)$ à des espaces M plus généraux.
Peut-on se passer de l'hypothèse de doublement ? Une réponse positive à cette question nous permettrait d'obtenir une propriété d'algèbre pour $\dot{L}^p_\alpha(G) \cap L^\infty(G)$ pour certains groupes de Lie unimodulaires à croissance exponentielle (ceux pour lesquels on peut établir la continuité des transformées de Riesz, voir le dernier point du paragraphe précédent). À ce jour, l'auteur ne connait des résultats sur les propriétés d'algèbre de $\dot{L}^p_\alpha(G) \cap L^\infty(G)$ que lorsque G est à croissance polynomiale.

2. Les résultats de [Fre14] sont établis en travaillant avec le semi-groupe e^{-tL} tandis que nous utilisons la chaîne de Markov P^k. Cependant, il est raisonnable de penser que les résultats de Bernicot, Coulhon, Frey s'adaptent au cas des graphes et que les nôtres s'adaptent à leur contexte.

Appendix A

Littlewood-Paley functionals on graphs

A.1 Introduction

Throughout the paper, we use the following notations. If E is a nonempty set and A and B are some quantities depending on $x \in E$, the notation $A(x) \lesssim B(x)$ means that there exists C such that $A(x) \leq C\, B(x)$ for all $x \in E$, while $A(x) \simeq B(x)$ means that $A(x) \lesssim B(x)$ and $B(x) \lesssim A(x)$.
If E and F are Banach spaces and $T : E \to F$ is a bounded linear operator, $\|T\|_{E\to F}$ stands for the operator norm of T. When $E = L^p$ and $F = L^q$ for $1 \leq p, q \leq +\infty$, $\|T\|_{L^p \to L^q}$ will also be denoted by $\|T\|_{p,q}$.

This paper is devoted to the L^p-boundedness of Littlewood-Paley type square functionals on graphs. The prototype of these functionals is the g-function in the Euclidean space, defined in the following way. If f is, say, in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ and $u(x, t)$ denotes "the" harmonic extension of f, that is $u(x, t) = P_t * f(x)$ for all $t > 0$ and all $x \in \mathbb{R}^n$, where P_t stands for the Poisson kernel, define

$$g_1 f(x) := \left(\int_0^{+\infty} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \right|^2 + \sum_{1\leq i\leq n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x,t) \right|^2 \right) \frac{dt}{t} \right)^{1/2}.$$

It is a well-known fact ([Ste70a, Chapter 4, Theorem 1]) that, for all $p \in (1, +\infty)$,

$$\|g_1 f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \sim \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{A.1}$$

This result was extended in various directions, and we only recall some of them. In the Euclidean framework, the harmonic extension can be replaced by e^{-tL}, where L is a second order uniformly elliptic operator in divergence form. In this case, the range of p in (A.1) is related to the L^p boundedness of e^{-tL} or $t\nabla e^{-tL}$ (see [Aus07, Chapter 7]).
If, in the functional g, one is only interested in the "horizontal" part, *i.e.* the derivative with respect to t, then the L^p boundedness of the corresponding Littlewood-Paley functional holds in the much more general context of measured spaces endowed with appropriate Markov semigroups ([Ste70b, Corollaries 1 and 2]). Notice also that similar results can be proved when the derivative $\frac{\partial}{\partial t}$ is replaced by a "fractional" derivative ([CRW78]).
Littlewood-Paley functionals were also considered in the context of complete Riemannian manifolds. Let M be a complete Riemannian manifold, ∇ be the Riemannian gradient and Δ the Laplace-Beltrami operator. Consider the "vertical" functionals

$$G(f)(x) := \left(\int_0^{+\infty} \left| t\nabla e^{-t\sqrt{\Delta}} f(x) \right|^2 \frac{dt}{t} \right)^{1/2}$$

and

$$Hf(x) := \left(\int_0^{+\infty} \left| \sqrt{t}\nabla e^{-t\Delta} f(x) \right|^2 \frac{dt}{t} \right)^{1/2}.$$

Several L^p-boundedness results for G and H are known. Let us recall here that, when $1 < p \leq 2$, G and H are $L^p(M)$-bounded when M is an *arbitrary* complete Riemannian manifold ([CDL03, Theorem 1.2]), while the $L^p(M)$-boundedness of G and H for $p > 2$ holds under much stronger assumptions, expressed in terms of the domination of the gradient of the semigroup by the semigroup applied to the gradient ([CD03, Proposition 3.1]).
Littlewood-Paley functionals on graphs were also considered. In [Dun08], if Δ is a Laplace operator on a graph Γ, a "vertical" Littlewood-Paley functional, involving the (continuous-time) semigroup generated by Δ, is proved to be $L^p(\Gamma)$-bounded for all $1 < p \leq 2$ under very weak assumptions on Γ. In [BR09], "discrete time" Littlewood-Paley functionals are proved to be $L^p(\Gamma)$-bounded under geometric assumptions on Γ (about the volume growth of balls, or L^2 Poincaré inequalities), while similar results are obtained for weighted L^p-norms in [BM12]. Note also that the L^p-boundedness of discrete time Littlewood-Paley functionals in abstract settings was recently established in [ALM14].
The present paper is devoted to the proof of the L^p-boundedness on graphs of some discrete time fractional Littlewood-Paley horizontal or vertical functionals. Before stating our results, let us present the graphs under consideration.

A.1.1 Presentation of the discrete framework

General setting

Let Γ be an infinite set and $\mu_{xy} = \mu_{yx} \geq 0$ a symmetric weight on $\Gamma \times \Gamma$. The couple (Γ, μ) induces a (weighted unoriented) graph structure if we define the set of edges by

$$E = \{(x,y) \in \Gamma \times \Gamma,\ \mu_{xy} > 0\}.$$

We call then x and y neighbors (or $x \sim y$) if $(x,y) \in E$.
We will assume that the graph is connected and locally uniformly finite. A graph is connected if for all $x, y \in \Gamma$, there exists a path $x = x_0, x_1, \dots, x_N = y$ such that for all $1 \leq i \leq N$, $x_{i-1} \sim x_i$ (the length of such path is then N). A graph is said to be locally uniformly finite if there exists $M_0 \in \mathbb{N}$ such that for all $x \in \Gamma$, $\#\{y \in \Gamma,\ y \sim x\} \leq M_0$ (i.e. the number of neighbors of a vertex is uniformly bounded).
The graph is endowed with its natural metric d, which is the shortest length of a path joining two points. For all $x \in \Gamma$ and all $r > 0$, the ball of center x and radius r is defined as $B(x,r) = \{y \in \Gamma,\ d(x,y) < r\}$. In the opposite way, the radius of a ball B is the only integer r such that $B = B(x_B, r)$ (with x_B the center of B). Therefore, for all balls $B = B(x,r)$ and all $\lambda > 0$, we set $\lambda B := B(x, \lambda r)$ and define $C_j(B) = 2^{j+1}B \backslash 2^j B$ for all $j \geq 2$ and $C_1(B) = 4B$.
We define the weight $m(x)$ of a vertex $x \in \Gamma$ by $m(x) = \sum_{x \sim y} \mu_{xy}$. More generally, the volume of a subset $E \subset \Gamma$ is defined as $m(E) := \sum_{x \in E} m(x)$. We use the notation $V(x,r)$ for the volume of the ball $B(x,r)$, and in the same way, $V(B)$ represents the volume of a ball B.
We define now the $L^p(\Gamma)$ spaces. For all $1 \leq p < +\infty$, we say that a function f on Γ belongs to $L^p(\Gamma, m)$ (or $L^p(\Gamma)$) if

$$\|f\|_p := \left(\sum_{x \in \Gamma} |f(x)|^p m(x) \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty,$$

while $L^\infty(\Gamma)$ is the set of functions satisfying

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in \Gamma} |f(x)| < +\infty.$$

Let us define for all $x, y \in \Gamma$ the discrete-time reversible Markov kernel p associated to the measure m by $p(x,y) = \frac{\mu_{xy}}{m(x)m(y)}$. The discrete kernel $p_l(x,y)$ is then defined recursively for all $l \geq 0$ by

$$\begin{cases} p_0(x,y) = \frac{\delta(x,y)}{m(y)} \\ p_{l+1}(x,y) = \sum_{z \in \Gamma} p(x,z) p_l(z,y) m(z). \end{cases} \tag{A.2}$$

Remark A.1.1. *Note that this definition of p_l differs from the one of p_l in [Rus00], [BR09] or [Del99], because of the $m(y)$ factor. However, p_l coincides with K_l in [Dun06]. Remark that in the case of the Cayley graphs of finitely generated discrete groups, where $m(x) = 1$ for all x, the definitions coincide.*

Notice that for all $l \geq 1$, we have

$$\|p_l(x,.)\|_{L^1(\Gamma)} = \sum_{y\in\Gamma} p_l(x,y)m(y) = \sum_{d(x,y)\leq l} p_l(x,y)m(y) = 1 \qquad \forall x \in \Gamma, \tag{A.3}$$

and that the kernel is symmetric:

$$p_l(x,y) = p_l(y,x) \qquad \forall x,y \in \Gamma. \tag{A.4}$$

For all functions f on Γ, we define P as the operator with kernel p, i.e.

$$Pf(x) = \sum_{y\in\Gamma} p(x,y)f(y)m(y) \qquad \forall x \in \Gamma. \tag{A.5}$$

It is easily checked that P^l is the operator with kernel p_l.

Remark A.1.2. *Even if the definition of p_l is different from [Rus00] or [BR09], P^l is the same operator in both cases.*

Since $p(x,y) \geq 0$ and (A.3) holds, one has, for all $p \in [1,+\infty]$,

$$\|P\|_{p\to p} \leq 1. \tag{A.6}$$

Remark A.1.3. *Let $1 < p < +\infty$. Since, for all $l \geq 0$, $\left\|P^l\right\|_{p\to p} \leq 1$, the operators $(I-P)^\beta$ and $(I+P)^\beta$ are L^p-bounded for all $\beta > 0$ (see [CSC90], p. 423).*

We define a nonnegative Laplacian on Γ by $\Delta = I - P$. One has then

$$\begin{aligned} <(I-P)f, f>_{L^2(\Gamma)} &= \sum_{x,y\in\Gamma} p(x,y)(f(x)-f(y))f(x)m(x)m(y) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{x,y\in\Gamma} p(x,y)|f(x)-f(y)|^2 m(x)m(y), \end{aligned} \tag{A.7}$$

where we use (A.3) for the first equality and (A.4) for the second one. The last calculus proves that the following operator

$$\nabla f(x) = \left(\frac{1}{2}\sum_{y\in\Gamma} p(x,y)|f(y)-f(x)|^2 m(y)\right)^{\frac{1}{2}},$$

called "length of the gradient" (and the definition of which is taken from [CG98]), satisfies

$$<(I-P)f, f>_{L^2(\Gamma)} = \|\nabla f\|^2_{L^2(\Gamma)}. \tag{A.8}$$

Geometric assumptions and estimates for the Markov operator

Under suitable geometric assumptions on Γ, the iterates of P satisfy various $L^p - L^q$ estimates, which we now review.
Our first assumption is:

Definition A.1.4. *A graph (Γ,μ) satisfies (LB) if there exists $\epsilon > 0$ such that*

$$\mu_{xx} \geq \epsilon m(x) \qquad \forall x \in \Gamma. \tag{LB}$$

Remark A.1.5. *Let us state a stronger assumption than (LB): there exists $\epsilon > 0$ such that for all $x \in \Gamma$, $x \sim x$ and*

$$\mu_{xy} \geq \epsilon m(x) \qquad \forall x \sim y. \tag{LB_2}$$

Even if (LB_2) plays a crucial role in some parabolic regularity estimates on graphs ([Del99]), it will play no role in our results.

The second assumption is the following one:

Definition A.1.6 (Doubling property)**.** *The weighted graph* (Γ, μ) *satisfies the doubling property if there exists* $C > 0$ *such that*

$$V(x, 2r) \leq CV(x, r) \qquad \forall x \in \Gamma, \forall r > 0. \tag{DV}$$

Recall that, under the assumption (DV), there exists $d > 0$ such that

$$V(\theta x, r) \lesssim \theta^d V(x, r) \qquad \forall r > 0,\, x \in \Gamma,\, \theta \geq 1. \tag{A.9}$$

In the sequel, a local version of (DV) will also be needed:

Definition A.1.7. *Say that* (Γ, μ) *satisfies* (LDV) *if there exists* $c > 0$ *such that*

$$V(x, 2) \leq cm(x) \qquad \forall x \in \Gamma. \tag{LDV}$$

Let us also state the Poincaré inequalities needed in the sequel.

Definition A.1.8 (Poincaré inequality on balls)**.** *Let* $s \in [1, +\infty)$*. The weighted graph* (Γ, μ) *satisfies the Poincaré inequality* (P_s) *if there exists* $C > 0$ *such that, for all* $x \in \Gamma$*, all* $r > 0$ *and all functions on* Γ

$$\frac{1}{V(x, r)} \sum_{y \in B(x,r)} |f(y) - f_B|^s m(y) \leq C \frac{r^s}{V(x, 2r)} \sum_{y \in B(x,2r)} |\nabla f(y)|^s m(y), \tag{P_s}$$

where

$$f_B = \frac{1}{V(B)} \sum_{x \in B} f(x)m(x). \tag{A.10}$$

Remark A.1.9. *It is a known fact that* (P_{s_1}) *implies* (P_{s_2}) *if* $s_1 \leq s_2$ *(cf [HK00]).*

Let us now introduce some estimates on p_l, which will be needed in the statement of our results.

Definition A.1.10 (On diagonal upper estimate of p_l)**.** *We say that* (Γ, μ) *satisfies* (DUE) *if there exists* $C > 0$ *such that, for all* $x \in \Gamma$ *and all* $l \in \mathbb{N}^*$*,*

$$p_l(x, x) \leq \frac{C}{V(x, \sqrt{l})}. \tag{DUE}$$

Definition A.1.11. *Let* $p \in [1, +\infty]$*. Say that a weighted graph* (Γ, μ) *verifies* (GG_p) *if*

$$\|\nabla P^l f\|_{L^p} \leq \frac{C_p}{\sqrt{l}} \|f\|_{L^p} \ \forall l \in \mathbb{N}^*, \forall f \in L^p(\Gamma). \tag{GG_p}$$

Remark A.1.12. *Note that the assumption* (GG_∞) *holds when* Γ *is the Cayley graph of a finitely generated discrete group (as well as assumption* (P_1)*, see [HK00]). Indeed, in this case,*

$$\nabla_x p_l(x, y) \lesssim \left(\frac{1}{lV(x, \sqrt{l})V(y, \sqrt{l})} \right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-c \frac{d^2(x, y)}{l} \right).$$

A.1.2 Main results

For all $\beta > 0$, all functions f on Γ and all $x \in \Gamma$, define

$$g_\beta f(x) = \left(\sum_{l \geq 1} l^{2\beta - 1} \left| (I - P)^\beta P^{l-1} f(x) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

For all $\beta > -\frac{1}{2}$, all functions f on Γ and all $x \in \Gamma$, define

$$\tilde{g}_\beta f(x) = \left(\sum_{l \geq 1} l^{2\beta} \left| \nabla (I - P)^\beta P^{l-1} f(x) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Here is our main result:

Theorem A.1.13. *Let (Γ, μ) be a weighted graph satisfying (DV), (LB) and (DUE). Then*

1. *g_β is of weak type $(1,1)$, which means that there exists $C > 0$ such that, for all $\lambda > 0$,*

$$m\left(\{x \in \Gamma;\ g_\beta f(x) > \lambda\}\right) \le \frac{C}{\lambda} \|f\|_{L^1(\Gamma)},$$

and of strong type (p,p) for all $1 < p < +\infty$, i.e. there exists a constant $C > 0$ such that

$$\|g_\beta f\|_{L^p} \le C\|f\|_{L^p} \qquad \forall f \in L^p(\Gamma) \cap L^2(\Gamma).$$

2. *$\tilde{g}_\beta$ is of weak type $(1,1)$, and of strong type (p,p) for all $1 < p \le 2$. Moreover, if (Γ, μ) satisfies (P_2) and (GG_q) for some $q > 2$, then $\tilde{g}_\beta$ is of strong type (p,p) for $p \in (2,q)$.*
3. *For all $1 < p < +\infty$,*

$$\|f\|_{L^p} \le C\|g_\beta f\|_{L^p} \qquad \forall f \in L^p(\Gamma) \cap L^2(\Gamma),$$

for all $2 \le p < +\infty$

$$\|f\|_{L^p} \le C\|\tilde{g}_\beta f\|_{L^p} \qquad \forall f \in L^p(\Gamma) \cap L^2(\Gamma)$$

and if (P_2) and (GG_q) are true for some $q > 2$, then for all $q' < p < 2$ (with $\frac{1}{q'} + \frac{1}{q} = 1$),

$$\|f\|_{L^p} \le C\|\tilde{g}_\beta f\|_{L^p} \qquad \forall f \in L^p(\Gamma) \cap L^2(\Gamma).$$

Our second result deals with the L^p-boundedness of $\tilde{g}_0$, under very weak assumptions on Γ:

Theorem A.1.14. *Let (Γ, μ) be a graph satisfying (LB) and* (LDV)*. Then $\tilde{g}_0$ is L^p-bounded for all $p \in (1,2]$.*

Remark A.1.15. *The range $\beta > -\frac{1}{2}$ for the L^p-boundedness of $\tilde{g}_\beta$ is related to the presence of ∇ in $\tilde{g}_\beta$.*

Remark A.1.16.
1. *The L^p-boundedness of g_1 was proved in [BR09, Theorem 1.16]. Theorem A.1.13 extends this fact to a fractional version of g_1. Moreover, we prove a similar estimate for the vertical Littlewood-Paley functional $\tilde{g}_\beta$ and also establish converse inequalities.*
2. *The L^p-boundedness of g_β can be deduced from arguments in [ALM14]. Indeed, since g_1 is of strong type (p,p) for all $p \in (1,+\infty)$ by [BR09, Theorem 1.16], [ALM14, Theorem 3.1] yields that P is an R-Ritt operator, and the fact that g_β is of strong type (p,p) for all $p \in (1,+\infty)$ follows from [ALM14, Theorem 3.3]. However, these arguments do not yield the fact that g_β is of weak type $(1,1)$. Moreover, they do not provide any information about $\tilde{g}_\beta$.*

Acknowledgements: the author would like to thank C. Le Merdy for pointing out reference [ALM14] to him.

A.2 Preliminary results

A.2.1 Estimates on the kernels

In this paragraph, we gather various estimates on p_l which will be instrumental in our proofs. The conjunction of (LB), (DV) and (DUE) provide us with further estimates on p_l. First, one has ([CGZ05, Theorem 5.2, Theorem 6.1]):

Proposition A.2.1. *Let (Γ, μ) be a weighted graph satisfying (DV) and (LB). Then, assumption (DUE) is equivalent to the off-diagonal upper estimate:*

$$p_l(x,y) \le C \left(\frac{1}{V(x,\sqrt{l})V(y,\sqrt{l})} \right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-c\frac{d^2(x,y)}{l} \right) \qquad \forall x,y \in \Gamma,\ \forall l \in \mathbb{N}^*. \tag{UE}$$

Remark A.2.2. *An immediate consequence of (DV) is that, for all $x,y \in \Gamma$ and $l \in \mathbb{N}^*$,*

$$p_{l-1}(x,y) \le C \left(\frac{1}{V(x,\sqrt{l})V(y,\sqrt{l})} \right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-c\frac{d^2(x,y)}{l} \right).$$

Remark A.2.3. *Assume that Γ is a graph satisfying (DV). It is easily checked that assumption (UE) is equivalent to*

$$p_l(x,y) \leq \frac{C}{V(y,\sqrt{l})} \exp\left(-c\frac{d^2(x,y)}{l}\right) \tag{A.11}$$

or

$$p_l(x,y) \leq \frac{C}{V(x,\sqrt{l})} \exp\left(-c\frac{d^2(x,y)}{l}\right). \tag{A.12}$$

We will now state some "time regularity" estimates for higher order differences of p_l (first proved for first order differences by Christ ([Chr95]) but an easier proof was given by Dungey in [Dun06]).

Theorem A.2.4. *Let (Γ,μ) be a weighted graph. Assume that Γ satisfies (DV), (LB) and (DUE). We define $D(r)$ as the following operator which acts on sequences*

$$(D(r)u)_l = u_l - u_{l+r}.$$

Then, for all $j \geq 0$ there exist two constants $C_j, c_j > 0$ such that, for all $l \geq 1$ and all $x,y \in \Gamma$,

$$|(D(1)^j p)_l(x,y)| \leq \frac{C_j}{l^j V(x,\sqrt{l})} \exp\left(-c_j\frac{d^2(x,y)}{l}\right). \tag{$TD-UE$}$$

Theorem A.2.4 (actually a slightly more general version) will be established in Section A.5.1 in the appendix. From the previous estimates, we derive the following result, the proof of which will be given in Section A.5.2 in the appendix.

Theorem A.2.5. *Let (Γ,μ) be a weighted graph satisfying (DV), (LB) and (DUE). The following Gaffney type inequalities hold: for all $j \in \mathbb{N}$, there exist $c, C > 0$ such that for all sets $E, F \subset \Gamma$, all $x_0 \in \Gamma$, all $l \in \mathbb{N}^*$ satisfying one of the following conditions*

(i) $\sup\{d(x_0,y),\, y \in F\} \leq 3d(E,F)$,

(ii) $\sup\{d(x_0,y),\, y \in F\} \leq \sqrt{l}$,

(iii) $\sup\{d(x_0,x),\, x \in E\} \leq 3d(E,F)$,

(iv) $\sup\{d(x_0,x),\, x \in E\} \leq \sqrt{l}$,

and all functions f supported in F, we have, for all $j \in \mathbb{N}$,

$$\|(I-P)^j P^l f\|_{L^2(E)} \leq \frac{C}{l^j} \frac{1}{V(x_0,\sqrt{l})^{\frac{1}{2}}} e^{-c\frac{d(E,F)^2}{l}} \|f\|_{L^1(F)} \tag{GT_2}$$

and

$$\begin{aligned} \|\nabla(I-P)^j P^l f\|_{L^2(E)} &\leq \frac{C}{l^{j+\frac{1}{2}}} \frac{1}{V(x_0,\sqrt{l})^{\frac{1}{2}}} e^{-c\frac{d(E,F)^2}{l}} \|f\|_{L^1(F)} \\ \|\nabla(I-P)^j P^l f\|_{L^2(E)} &\leq \frac{C}{l^{j+\frac{1}{2}}} e^{-c\frac{d(E,F)^2}{l}} \|f\|_{L^2(F)}. \end{aligned} \tag{GGT_2}$$

Remark A.2.6. *The theorem above will be used for*

$$(E,F) \in \{(B, C_j(B)),\ B \text{ ball },\, j \geq 2\} \cup \{(C_j(B), B),\ B \text{ ball },\, j \geq 2\}.$$

A.2.2 Results on the Hardy-Littlewood maximal function

Definition A.2.7. *Denote by $\mathcal{M}$ the Hardy-Littlewood maximal operator*

$$\mathcal{M}f(x) = \sup \frac{1}{V(B)} \sum_{y \in B} |f(y)| m(y)$$

where the supremum is taken over the balls B of Γ containing x.
In the same way, for $s \geq 1$, $\mathcal{M}_s$ will denote

$$\mathcal{M}_s f = (\mathcal{M}|f|^s)^{\frac{1}{s}}.$$

The following observation will turn to be useful: under the assumption (UE), for all $k \geq 1$, all functions f on Γ and all $x_0, x \in \Gamma$ with $d(x,x_0) \leq \sqrt{k}$,

$$\left|P^k f(x)\right| \leq \mathcal{M}f(x_0). \tag{A.13}$$

Indeed,

$$\begin{aligned}
\left|P^k f(x)\right| &= \left|\sum_{y\in\Gamma} p_k(x,y) f(y) m(y)\right| \\
&\lesssim \sum_{y\in\Gamma} \frac{1}{V(x,\sqrt{k})} \exp\left(-c\frac{d(x,y)^2}{k}\right) |f(y)| m(y) \\
&\lesssim \frac{1}{V(x,\sqrt{k})} \sum_{d(x,y)<\sqrt{k}} |f(y)|m(y) + \sum_{j\geq 0} \frac{e^{-c2^{2j}}}{V(x,\sqrt{k})} \sum_{2^j\sqrt{k}\leq d(x,y)<2^{j+1}\sqrt{k}} |f(y)|m(y) \\
&\lesssim \frac{1}{V(x,\sqrt{k})} \sum_{d(x,y)<\sqrt{k}} |f(y)|m(y) \\
&\qquad \sum_{j\geq 0} \frac{2^{(j+1)d} e^{-c2^{2j}}}{V(x,2^{j+1}\sqrt{k})} \sum_{2^j\sqrt{k}\leq d(x,y)<2^{j+1}\sqrt{k}} |f(y)|m(y) \\
&\leq \left(1 + \sum_{j\geq 0} 2^{(j+1)d} e^{-c2^{2j}}\right) \mathcal{M}f(x_0) \\
&\lesssim \mathcal{M}f(x_0),
\end{aligned}$$

where we use for the fifth line the doubling property and the fact that $d^2(x,x_0) \leq k$.

Proposition A.2.8. *Let (Γ,μ) be a weighted graph satisfying (DV). If $(q,q_0,\beta) \in (1,+\infty]^2 \times [0,1)$ satisfy $\frac{1}{q} = \frac{1}{q_0} - \beta$, then $\mathcal{M}^\beta$ is bounded from $L^{q_0}(\Gamma)$ to $L^q(\Gamma)$.*

We also recall the Fefferman-Stein inequality.

Theorem A.2.9. *Let (Γ,μ) be a weighted graph satisfying (DV) and $s \geq 1$. Then, if $p,q \in (s,+\infty)$, there exists $C_{p,q} > 0$ such that for all sequences $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ of measurable functions defined on Γ,*

$$\left\| \left[\sum_{n=0}^{+\infty} (\mathcal{M}_s f_n)^q\right]^{\frac{1}{q}} \right\|_p \leq C_{p,q} \left\| \left[\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n|^q\right]^{\frac{1}{q}} \right\|_p .$$

This result is proven in $\mathbb{R}^d$ in [FS71] and the proof easily extends to spaces of homogeneous type.

A.2.3 L^p boundedness for Calderón-Zygmund operators

We will make use of the following theorems about Calderón-Zygmund operators "without kernels", which can be found in [BR09], Theorem 1.14 and Theorem 1.17. See also [Aus07], Theorem 1.1 and 1.2. Before stating these results, recall (see Theorem A.1.13) that a sublinear operator T is of weak type (p,p) $(1 \leq p < +\infty)$ if there exists $C > 0$ such that, for all $\lambda > 0$ and all $f \in L^p(\Gamma)$,

$$m\left(\{x \in \Gamma;\ |Tf(x)| > \lambda\}\right) \leq \frac{C}{\lambda^p} \|f\|_{L^p(\Gamma)}^p .$$

Furthermore, T is said to be of strong type (p,p) if there exists $C > 0$ such that, for all $f \in L^p(\Gamma)$,

$$\|Tf\|_{L^p(\Gamma)} \leq C \|f\|_{L^p(\Gamma)} .$$

Theorem A.2.10. *Let $p_0 \in (2, +\infty]$. Assume that Γ satisfies the doubling property (DV) and let T be a sublinear operator of strong type $(2,2)$ defined on Γ. For all balls B, let A_B be a linear operator acting on $L^2(\Gamma)$. Assume that there exists a constant $C > 0$ such that, for all $f \in L^2(\Gamma)$, all $x \in \Gamma$ and all balls $B \ni x$,*

$$\frac{1}{V(B)^{\frac{1}{2}}} \|T(I - A_B)f\|_{L^2(B)} \leq C\mathcal{M}_2 f(x) \tag{A.14}$$

and

$$\frac{1}{V(B)^{\frac{1}{p_0}}} \|TA_B f\|_{L^{p_0}(B)} \leq C\mathcal{M}_2 |Tf|(x). \tag{A.15}$$

Then, for all $p \in (2, p_0)$, T is of strong type (p,p).

Theorem A.2.11. *Let $p_0 \in [1,2)$. Assume that Γ satisfies the doubling property (DV) and let T be a sublinear operator of strong type $(2,2)$. For all balls B, let A_B be a linear operator acting on $L^2(\Gamma)$. Assume that, for all $j \geq 1$, there exists $\varphi(j) > 0$ such that, for all $B \subset \Gamma$ and all functions supported in B and all $j \geq 2$,*

$$\frac{1}{V(2^{j+1}B)^{\frac{1}{2}}} \|T(I - A_B)f\|_{L^2(C_j(B))} \leq \varphi(j) \frac{1}{V(B)^{\frac{1}{p_0}}} \|f\|_{L^{p_0}} \tag{A.16}$$

and for all $j \geq 1$

$$\frac{1}{V(2^{j+1}B)^{\frac{1}{p_0}}} \|A_B f\|_{L^2(C_j(B))} \leq \varphi(j) \frac{1}{V(B)^{\frac{1}{p_0}}} \|f\|_{L^{p_0}}. \tag{A.17}$$

If $\sum_{j\geq 1} \varphi(j) 2^{jd} < +\infty$, where d is given by Proposition A.9, then T is of weak type (p_0, p_0), and therefore of strong type (p,p) for all $p_0 < p < 2$.

A.3 Littlewood-Paley functionals

A.3.1 $L^2(\Gamma)$-boundedness of g^2_β

In order to prove Theorem A.1.13, let us introduce an extra functional.

Lemma A.3.1. *Let (Γ, μ) be a weighted graph. Let P be the operator defined by (A.5).*
Define, for all $\beta > 0$ and all functions $f \in L^2(\Gamma)$, $g^2_\beta f$ by

$$g^2_\beta f(x) = \left(\sum_{l \geq 1} b_l \left| (I - P^2)^\beta P^{l-1} f(x) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

where $\sum_{l\geq 1} b_l z^{l-1}$ is the Taylor series of the function $z \mapsto (1-z)^{-2\beta}$. Then g^2_β is $L^2(\Gamma)$ bounded. More precisely, g^2_β is an isometry on $L^2(\Gamma)$, which means that, for all $f \in L^2(\Gamma)$,

$$\|g^2_\beta f\|_{L^2(\Gamma)} = \|f\|_{L^2(\Gamma)}.$$

Proof. Since $\|P\|_2 \leq 1$, by spectral theory, P can be written as

$$P = \int_{-1}^{1} \lambda dE(\lambda).$$

It follows that for all $l \geq 1$, one has

$$(I - P^2)^\beta P^{l-1} = \int_{-1}^{1} (1 - \lambda^2)^\beta \lambda^{l-1} dE(\lambda)$$

so that, for all $f \in L^2(\Gamma)$ and $l \geq 1$,

$$\|(I - P^2)^\beta P^{l-1} f\|^2_{L^2} = \int_{-1}^{1} (1 - \lambda^2)^{2\beta} \lambda^{2(l-1)} dE_{f,f}(\lambda).$$

The L^2-norm of $g_\beta^2 f$ can be now computed as

$$\begin{aligned}
\|g_\beta^2 f\|_{L^2}^2 &= \sum_{l\geq 1} b_l \|(I-P^2)^\beta P^{l-1} f\|_{L^2}^2 \\
&= \int_{-1}^1 (1-\lambda^2)^{2\beta} \sum_{l\geq 1} b_l \lambda^{2(l-1)} dE_{f,f}(\lambda) \\
&= \int_{-1}^1 dE_{f,f}(\lambda) \\
&= \|f\|_{L^2}^2
\end{aligned}$$

where the third line is a consequence of the definition of b_l. □

Lemma A.3.2. *Let* (Γ,μ) *be a weighted graph satisfying* (LB).
Then g_β *and* $\tilde{g}_\beta$ *are* $L^2(\Gamma)$*-bounded.*

Proof. Since Γ satisfies (LB), -1 is not in the L^2 spectrum of P (see for instance Lemma 1.3 in [Dun06]). Therefore there exists $a>-1$ such that

$$P = \int_a^1 \lambda dE(\lambda).$$

Proceeding as in the proof of the Lemma A.3.1, we obtain

$$\begin{aligned}
\|g_\beta f\|_{L^2}^2 &= \int_a^1 (1-\lambda)^{2\beta} \sum_{l\geq 1} l^{2\beta-1} \lambda^{2(l-1)} dE_{f,f}(\lambda) \\
&\lesssim \int_a^1 (1-\lambda)^{2\beta} \frac{1}{(1-\lambda^2)^{2\beta}} dE_{f,f}(\lambda) \\
&= \int_a^1 \frac{1}{(1+\lambda)^{2\beta}} dE_{f,f}(\lambda) \\
&\lesssim \|f\|_{L^2}^2
\end{aligned}$$

where, for the second line, we use Lemma A.6.1.
For $\tilde{g}_\beta$, just notice that, by definition of ∇,

$$\|\tilde{g}_\beta f\|_{L^2} = \|g_{\beta+\frac{1}{2}} f\|_{L^2}.$$

□

A.3.2 $L^p(\Gamma)$-boundedness of g_β, $2<p<+\infty$

The proof of the L^p- boundedness of g_β for $p>2$ is based on the following Lemma and Theorem A.2.10. The idea of the proof comes from Theorem 1.16 in [BR09].

Lemma A.3.3. *Let* (Γ,μ) *be a weighted graph satisfying* (DV), (LB) *and* (DUE).
For all $n\in\mathbb{N}^*$, *there exists a constant* $C_n>0$ *such that, for all balls* $B=B(x_0,r)$ *of* Γ, *all* $j\geq 2$ *and all* f *supported in* $C_j(B)$, *one has*

$$\left\| g_\beta (I-P^{r^2})^n f \right\|_{L^2(B)} \leq C_n 2^{j(\frac{d}{2}-2n)} \left(\frac{V(B)}{V(2^j B)} \right)^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^2}$$

Proof. First fix $n\in\mathbb{N}^*$. Denote by η the only integer such that $\eta+1\geq\beta>\eta\geq 0$. We use the fact that

$$(I-P)^{\beta-1-\eta} = \sum_{k\geq 0} a_k P^k$$

where $\sum a_k z^k$ is the Taylor series of the function $(1-z)^{\beta-\eta-1}$. Note that the equality holds on $L^2(\Gamma)$ by spectral theory and (A.6). Moreover, notice that if β is an integer, then $a_k=\delta_0(k)$.

By the generalized Minkowski inequality, we get

$$\left\|g_\beta(I-P^{r^2})^n f\right\|_{L^2(B)} \leq \sum_{k\geq 0} a_k \left(\sum_{l\geq 1} l^{2\beta-1}\left\|(I-P)^{1+\eta}P^{k+l-1}(I-P^{r^2})^n f\right\|^2_{L^2(B)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

We divide the sequel of the proof in 3 steps.

1- Estimate of the inner term

Notice that $I-P^{r^2}=(I-P)\sum_{s=0}^{r^2-1}P^s$. Then, we get

$$\|(I-P)^{1+\eta}P^{k+l-1}(I-P^{r^2})^n f\|_{L^2(B)} \leq r^{2n} \sup_{s\in[\![0,nr^2]\!]}\|(I-P)^{1+\eta+n}P^{k+l+s-1}f\|_{L^2(B)}$$

We now estimate the terms $\|(I-P)^{1+\eta}P^{k+l+s-1}f\|_{L^2(B)}$. For $0\leq s\leq nr^2$, since f is supported in $C_j(B)$ and by Remark A.2.2, one has,

$$\begin{aligned}
&\|(I-P)^{1+n+\eta}P^{k+l-1+s}f\|_{L^2(B)}\\
&\qquad\lesssim \frac{1}{(l+k+s)^{1+\eta+n}}\exp\left(-c\frac{(2^j-1)^2r^2}{l+k+s}\right)\|f\|_{L^2(C_j(B))}\\
&\qquad\lesssim \frac{1}{(l+k+s)^{1+\eta+n}}\exp\left(-c\frac{4^jr^2}{l+k+s}\right)\|f\|_{L^2(C_j(B))}\\
&\qquad\lesssim 2^{\frac{jd}{2}}\left(\frac{V(B)}{V(2^jB)}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{(l+k+s)^{1+\eta+n}}\exp\left(-c\frac{4^jr^2}{l+k+s}\right)\|f\|_{L^2}
\end{aligned}$$

where the first line follows from (GT_2) and Cauchy-Schwarz and the third one from (DV). Consequently, we obtain

$$\begin{aligned}
&\|(I-P)^{1+\eta}P^{k+l-1}(I-P^{r^2})^n f\|_{L^2(B)}\\
&\qquad\lesssim r^{2n}2^{\frac{jd}{2}}\sup_{s\in[\![0,nr^2]\!]}\left[\frac{\exp\left(-c\frac{(4^jr^2}{l+k+s}\right)}{(l+k+s)^{(1+\eta+n)}}\right]\left(\frac{V(B)}{V(2^jB)}\right)^{\frac{1}{2}}\|f\|_{L^2}\\
&\qquad\leq r^{2n}l^{-\eta}2^{\frac{jd}{2}}\sup_{s\in[\![0,nr^2]\!]}\left[\frac{\exp\left(-c\frac{4^jr^2}{l+k+s}\right)}{(l+k+s)^{1+n}}\right]\left(\frac{V(B)}{V(2^jB)}\right)^{\frac{1}{2}}\|f\|_{L^2}.
\end{aligned} \tag{A.18}$$

2- Reverse Hölder estimates

According to Proposition A.7.2 below , the set of sequences $\{A_l^{k,r,j},\ k\in\mathbb{N},\ r\in\mathbb{N}^*,\ j\geq 2\}$, where

$$A_l^{k,r,j}=l^{\beta-\eta}\sup_{s\in[\![0,nr^2]\!]}\left\{\frac{\exp\left(-c\frac{4^jr^2}{l+k+s}\right)}{(l+k+s)^{1+n}}\right\},$$

is included in

$$E_M=\left\{(a_l)_{l\geq 1},\ \forall l\in\mathbb{N}^*,\ 0\leq a_l\leq M\sum_{k\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{k}a_k\right\}$$

for some $M>0$. Therefore, Lemma A.7.1 below yields

$$\begin{aligned}
V(B)^{-\frac{1}{2}}\left\|g_\beta(I-P^{r^2})^n f\right\|_{L^2(B)} &\lesssim r^{2n}2^{\frac{jd}{2}}V(2^jB)^{-\frac{1}{2}}\|f\|_{L^2}\sum_{k\geq 0}a_k\left(\sum_{l\geq 1}\frac{1}{l}(A_l^{k,r,j})^2\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\lesssim r^{2n}2^{\frac{jd}{2}}V(2^jB)^{-\frac{1}{2}}\|f\|_{L^2}\sum_{k\geq 0}a_k\sum_{l\geq 1}\frac{1}{l}A_l^{k,r,j}.
\end{aligned}$$

3- End of the calculus

Note, thanks to Lemma A.6.1, that, when β is not an integer,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m-1} a_k(m-k)^{\beta-1-\eta} &\lesssim 1+\sum_{k=1}^{m-1} k^{\eta-\beta}(m-k)^{\beta-\eta-1}\\ &= 1+\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m-1}\left(\frac{k}{m}\right)^{\eta-\beta}\left(1-\frac{k}{m}\right)^{\beta-1-\eta}\\ &\xrightarrow[m\to+\infty]{} 1+\int_0^1 t^{\eta-\beta}(1-t)^{\beta-1-\eta}dt<+\infty.\end{aligned}$$

The integral converges since $\eta-\beta>-1$ and $\beta-1-\eta>-1$. It follows that

$$\sum_{k=0}^{m-1} a_k(m-k)^{\beta-\eta-1}\lesssim 1. \tag{A.19}$$

Since $a_k=\delta_0(k)$ and $\beta-1-\eta=0$ when β is an integer, the result above holds for all $\beta>0$. Using the expression of $A_l^{k,r,j}$, we have

$$V(B)^{-\frac{1}{2}}\left\|g_\beta(I-P^{r^2})^n f\right\|_{L^2(B)}\lesssim V(2^jB)^{-\frac{1}{2}}r^{2n}2^{\frac{jd}{2}}\|f\|_{L^2}\sum_{m=1}^{+\infty}\sup_{s\in[\![0,nr^2]\!]}\left\{\frac{\exp\left(-c\frac{4^jr^2}{m+s}\right)}{(m+s)^{1+n}}\right\}$$

But, for some $c'\in(0,c)$,

$$\begin{aligned}&\sum_{m=1}^{+\infty}\sup_{s\in[\![0,nr^2]\!]}\left\{\frac{\exp\left(-c\frac{4^jr^2}{m+s}\right)}{(m+s)^{1+n}}\right\}\\ &=\frac{1}{(4^jr^2)^{1+n}}\sum_{m=1}^{+\infty}\sup_{s\in[\![0,nr^2]\!]}\exp\left(-c\frac{4^jr^2}{m+s}\right)\left(\frac{4^jr^2}{m+s}\right)^{1+n}\\ &\lesssim\frac{1}{(4^jr^2)^{1+n}}\sum_{m=1}^{4^jr^2}\exp\left(-c'\frac{4^jr^2}{m+nr^2}\right)+\frac{1}{(4^jr^2)^{1+n}}\sum_{m=4^jr^2+1}^{+\infty}\left(\frac{4^jr^2}{m}\right)^{1+n}\\ &\lesssim 4^{-jn}r^{-2n}.\end{aligned}$$

The proof of Lemma A.3.3 is now complete.

□

Proof. The proof of the L^p-boundedness of g_β for $p>2$ is analogous to the one found in [BR09], Theorem 1.16, when $2<p<+\infty$. Let us give the argument for the completeness. We are aiming to use Theorem A.2.10. It is enough to verify the validity of the assumptions (A.14) and (A.15). We choose $A_B=I-(I-P^{r^2})^n$, where r is the radius of B and $n>\frac{d}{4}$.

Proof of (A.14)

We need to check that, for all $f\in L^2$, for all $x_0\in\Gamma$ and all balls $B\ni x_0$, one has

$$\frac{1}{V(B)^{\frac{1}{2}}}\|g_\beta(I-P^{r^2})^n f\|_{L^2(B)}\lesssim\left(\mathcal{M}|f|^2\right)^{\frac{1}{2}}(x_0).$$

We can decompose

$$f=\sum_{j\geq 1} f\mathbb{1}_{C_j(B)}=:\sum_{j\geq 1} f_j.$$

First, since g_β and $I-A_B=(I-P^{r^2})^n$ are $L^2(\Gamma)$-bounded and by the doubling property,

$$\frac{1}{V(B)^{\frac{1}{2}}}\|g_\beta(I-P^{r^2})^n f_1\|_{L^2(B)}\lesssim\frac{1}{V(B)^{\frac{1}{2}}}\|f\|_{L^2(4B)}\lesssim\left(\mathcal{M}|f|^2\right)^{\frac{1}{2}}(x_0).$$

For $j \geq 2$, Lemma A.3.3 provides:

$$\frac{1}{V(B)^{\frac{1}{2}}}\|g_\beta(I-P^{r^2})^n f_j\|_{L^2(B)} \lesssim 2^{j(\frac{d}{2}-2n)}\frac{1}{V(2^jB)^{\frac{1}{2}}}\|f_j\|_{L^2}$$
$$\lesssim 2^{j(\frac{d}{2}-2n)}(\mathcal{M}|f|^2)^{\frac{1}{2}}(x_0).$$

Since $n > \frac{d}{4}$, we can sum in $j \geq 1$, which gives the result.

Proof of (A.15)

What we have to show is that, for all $m \in [\![1,n]\!]$, all $f \in L^2(\Gamma)\cap L^\infty(\Gamma)$, all $x_0 \in \Gamma$ and all balls $B \ni x_0$, one has,

$$\|g_\beta P^{mr^2} f\|_{L^\infty(B)} \lesssim (\mathcal{M}|g_\beta f|^2)^{\frac{1}{2}}(x_0).$$

First, since $\sum_{y\in G} p(x,y)m(y) = 1$, and by the use of Cauchy-Schwarz inequality, we obtain, for all $x \in \Gamma$ and $h \in L^2(\Gamma)$,

$$\left|P^{mr^2}h(x)\right| \leq \left(P^{mr^2}|h|^2(x)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Hence, it follows that for all $l \geq 1$

$$\left|P^{mr^2}(I-P)^\beta P^{l-1}f(x)\right|^2 \leq P^{mr^2}|(I-P)^\beta P^{l-1}f|^2(x),$$

so that, summing up in l,

$$\begin{aligned}(g_\beta P^{mr^2} f)(x)^2 &= \sum_{l\geq 1} l^{2\beta-1}|P^{mr^2}(I-P)^\beta P^{l-1}f(x)|^2 \\ &\leq P^{mr^2}\left(\sum_{l\geq 1} l^{2\beta-1}|(I-P)^\beta P^{l-1}f|^2\right)(x) \\ &= P^{mr^2}\left(|g_\beta f|^2\right)(x) \\ &\lesssim \mathcal{M}\left(|g_\beta f|^2\right)(x_0),\end{aligned}$$

where the last line is due to (A.13). Here ends the proof of (A.15), and the one of the L^p-boundedness of g_β for $p \in (2,+\infty)$.

□

A.3.3 L^p-boundedness of $\tilde{g}_\beta$, $2 \leq p < p_0$

Lemma A.3.4. *Let (Γ,μ) be a weighted graph satisfying (DV), (LB) and (DUE).*

For all $n \in \mathbb{N}^*$, there exists a constant C_n such that, for all balls $B = B(x_0,r)$ of Γ, all $j \geq 2$ and all f supported in $C_j(B) = 2^{j+1}B\backslash 2^jB$, we get

$$\left\|\tilde{g}_\beta(I-P^{r^2})^n f\right\|_{L^2(B)} \leq C_n 2^{j(\frac{d}{2}-2n)}\left(\frac{V(B)}{V(2^jB)}\right)^{\frac{1}{2}}\|f\|_{L^2}.$$

Proof. (Lemma A.3.4)

The proof is analogous to the one of Lemma A.3.3, and we only indicates the main differences.

Define η as in the proof of Lemma A.3.3. By the use of the generalized Minkowski inequality, we get

$$\left\|\tilde{g}_\beta(I-P^{r^2})^n f\right\|_{L^2(B)} \leq \sum_{k\geq 0} a_k\left(\sum_{l\geq 1} l^{2\beta}\left\|\nabla(I-P)^{1+\eta}P^{k+l-1}(I-P^{r^2})^n f\right\|^2_{L^2(B)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

We now distinguish the cases $\beta > 0$ (*i.e.* $\eta \in \mathbb{N}$) and $-\frac{1}{2} < \beta \leq 0$ (*i.e.* $\eta = -1$).

First case: $\beta > 0$. In this case, the proof is analogous to the one in Lemma A.3.3, using (GGT_2) instead of (GT_2).

Second case: $-\frac{1}{2} < \beta \leq 0$.

1. By (GGT_2),

$$\|\nabla P^{k+l-1}(I-P^{r^2})^n f\|_{L^2(B)} \lesssim 2^{\frac{jd}{2}} r^{2n} \sup_{s\in[\![0,nr^2]\!]} \left[\frac{\exp\left(-c\frac{4^j r^2}{l+k+s}\right)}{(l+k+s)^{n+\frac{1}{2}}} \right] \left(\frac{V(B)}{V(2^jB)}\right)^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^2(C_j(B))}.$$

2. Define now $B_l^{k,r,j}$ by

$$B_l^{k,r,j} = l^{\beta+\frac{1}{2}} \sup_{s\in[\![0,nr^2]\!]} \left\{ \frac{\exp\left(-c\frac{4^j r^2}{l+k+s}\right)}{(l+k+s)^{n+\frac{1}{2}}} \right\}$$

Remark A.7.5 below therefore shows

$$\begin{aligned} V(B)^{-\frac{1}{2}} \left\|\tilde{g}_\beta(I-P^{r^2})^n f\right\|_{L^2(B)} &\lesssim 2^{\frac{jd}{2}} V(2^jB)^{-\frac{1}{2}} \|f\|_{L^2} r^{2n} \sum_{k\geq 0} a_k \left(\sum_{l\geq 1} \frac{1}{l}(B_l^{k,r,j})^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\lesssim 2^{\frac{jd}{2}} V(2^jB)^{-\frac{1}{2}} \|f\|_{L^2} r^{2n} \sum_{k\geq 0} a_k \sum_{l\geq 1} \frac{1}{l} B_l^{k,r,j}. \end{aligned} \tag{A.20}$$

3. Thanks to Lemma A.6.1, one has

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{m-1} a_k (m-k)^{\beta-\frac{1}{2}} &\lesssim m^{\beta-\frac{1}{2}} + \sum_{k=1}^{m-1} k^{-\beta-1}(m-k)^{\beta-\frac{1}{2}} \\ &\lesssim \frac{1}{\sqrt{m}} \int_0^1 t^{-\beta-1}(1-t)^{\beta-\frac{1}{2}} dt, \end{aligned}$$

if $\beta \in (-\frac{1}{2}, 0)$. If $\beta = 0$, we have $a_k = \delta_0(k)$, so that, in both cases,

$$\sum_{k=0}^{m-1} a_k (m-k)^{\beta-\frac{1}{2}} \lesssim \frac{1}{\sqrt{m}}. \tag{A.21}$$

Using (A.20) and (A.21), one obtains

$$\begin{aligned} &V(B)^{-\frac{1}{2}} \left\|g_\beta(I-P^{r^2})^n f\right\|_{L^2(B)} \\ &\qquad \lesssim 2^{\frac{jd}{2}} V(2^jB)^{-\frac{1}{2}} \|f\|_{L^2} r^{2n} \sum_{m=1}^{+\infty} \sup_{s\in[\![0,nr^2]\!]} \left\{ \frac{\exp\left(-c\frac{4^j r^2}{m+s}\right)}{\sqrt{m}(m+s)^{n+\frac{1}{2}}} \right\}. \end{aligned}$$

However, one has,

$$\begin{aligned} &\sum_{m=1}^{+\infty} \sup_{s\in[\![0,nr^2]\!]} \left\{ \frac{\exp\left(-c\frac{4^j r^2}{m+s}\right)}{\sqrt{m}(m+s)^{n+\frac{1}{2}}} \right\} \\ &\qquad = \frac{1}{(4^j r^2)^{n+1}} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{2^j r}{\sqrt{m}} \sup_{s\in[\![0,nr^2]\!]} \left\{ \left(\frac{4^j r^2}{m+s}\right)^{n+\frac{1}{2}} \exp\left(-c\frac{4^j r^2}{m+s}\right) \right\} \\ &\qquad \lesssim \frac{1}{(4^j r^2)^{n+1}} \sum_{m=1}^{4^j r^2} \frac{2^j r}{\sqrt{m}} + \frac{1}{(4^j r^2)^{n+1}} \sum_{m=4^j r^2+1}^{+\infty} \left(\frac{4^j r^2}{m}\right)^{n+1} \\ &\qquad \lesssim 4^{-jn} r^{-2n}. \end{aligned}$$

It yields the desired result

$$V(B)^{-\frac{1}{2}} \left\|g_\beta(I-P^{r^2})^n f\right\|_{L^2(B)} \lesssim 2^{j(\frac{d}{2}-2n)} V(2^jB)^{-\frac{1}{2}} \|f\|_{L^2}$$

□

Proof. (L^p-boundedness of $\tilde{g}_\beta$ for $2<p<p_0$)
We use Theorem A.2.10 as well. The proof of (A.14) for $\tilde{g}_\beta$ is analogous to the corresponding one for g_β, by use of Lemma A.3.4. Let us now check (A.15). We argue as in [ACDH04] pp 932-936, using (P_2) and (GG_{p_0}).

We want to prove that, for all $2<p<p_0$, there exists C_n such that for all balls $B\subset\Gamma$ of radius r, all $m\in[\![0,n]\!]$, all functions f on Γ and $x\in B$,

$$\frac{1}{V^{\frac{1}{p}}(B)}\left\|\tilde{g}_\beta P^{2mr^2}f\right\|_{L^p(B)}\leq C_n\left(\mathcal{M}(|\tilde{g}_\beta f|^2)\right)^{\frac{1}{2}}(x). \tag{A.22}$$

Let $f\in L^2(\Gamma)$. Since $P^l1\equiv 1$ for all $l\in\mathbb{N}$, we may write, if $g^l=(I-P)^\beta P^{l-1}f$,

$$\nabla P^{mr^2}(I-P)^\beta P^{l-1}f=\nabla P^{mr^2}\left(g^l-\left(g^l\right)_{4B}\right).$$

Write $g^l-\left(g^l\right)_{4B}=\sum_{i\geq 1}g_i^l$ with $g_i^l=\left(g^l-\left(g^l\right)_{4B}\right)\mathbb{1}_{C_i(B)}$. For $i=1$, Lemma 4.2 in [BR09] and (P_2) yield

$$\begin{aligned}\left(\sum_{l\geq1}l^{2\beta}\left(\frac{1}{V^{\frac{1}{p}}(B)}\|\nabla P^{mr^2}g_1^l\|_{L^p(B)}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}&\lesssim\frac{1}{rV(4B)^{\frac{1}{2}}}\left(\sum_{l\geq1}l^{2\beta}\|g_1^l\|^2_{L^2(4B)}\right)^{\frac{1}{2}}\\&\lesssim\left(\frac{1}{V(8B)}\sum_{l\geq1}l^{2\beta}\sum_{y\in 8B}|\nabla g_1^l(y)|^2m(y)\right)^{\frac{1}{2}}\\&\lesssim\mathcal{M}_2\left(\tilde{g}_\beta f\right)(x).\end{aligned}$$

For $i\geq 2$, Lemma 4.2 in [BR09] shows that

$$\left(\sum_{l\geq1}l^{2\beta}\left(\frac{1}{V^{\frac{1}{p}}(B)}\|\nabla P^{mr^2}g_i^l\|\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\lesssim\frac{e^{-c4^i}}{r}\left(\frac{1}{V(2^{i+1}B)}\sum_{l\geq1}l^{2\beta}\|g_i^l\|^2_{L^2(C_i(B))}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

But for all $l\geq1$,

$$\begin{aligned}\|g_i^l\|_{L^2(C_i(B))}&\leq\|g^l-\left(g^l\right)_{4B}\|_{L^2(2^{i+1}B)}\\&\leq\|g^l-\left(g^l\right)_{2^{i+1}B}\|_{L^2(2^{i+1}B)}+V(2^{i+1}B)^{\frac{1}{2}}\sum_{j=2}^{i}|\left(g^l\right)_{2^jB}-\left(g^l\right)_{2^{j+1}B}|.\end{aligned}$$

For all $j\in[\![2,i]\!]$, (P_2) implies

$$\begin{aligned}|\left(g^l\right)_{2^jB}-\left(g^l\right)_{2^{j+1}B}|&\lesssim\frac{1}{V(2^{j+1}B)^{\frac{1}{2}}}\|g^l-\left(g^l\right)_{2^{j+1}B}\|_{L^2(2^{j+1}B)}\\&\lesssim 2^{j+1}r\frac{1}{V(2^{j+1}B)^{\frac{1}{2}}}\|\nabla g^l\|_{L^2(2^{j+1}B)},\end{aligned}$$

while

$$\|g^l-\left(g^l\right)_{2^{i+1}B}\|_{L^2(2^{i+1}B)}\lesssim 2^{i+1}r\left\|\nabla g^l\right\|_{L^2(2^{i+1}B)},$$

so that

$$\|g_i^l\|_{L^2(C_i(B))}\lesssim\sum_{j=2}^{i}2^jr\frac{V(2^{i+1}B)^{\frac{1}{2}}}{V(2^{j+1}B)^{\frac{1}{2}}}\left\|\nabla g^l\right\|_{L^2(2^{j+1}B)}.$$

As a consequence, by the Minkowski inequality,

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{V(2^{i+1}B)}\sum_{l\geq1}l^{2\beta}\|g_i^l\|^2_{L^2(C_i(B))}\right)^{\frac{1}{2}}&\lesssim\sum_{j=2}^{i}2^jr\frac{1}{V(2^{j+1}B)^{\frac{1}{2}}}\left(\sum_{l\geq1}l^{2\beta}\|\nabla g^l\|^2_{L^2(2^{j+2}B)}\right)^{\frac{1}{2}}\\&\lesssim\sum_{j=2}^{i}2^jr\mathcal{M}_2\tilde{g}_\beta f(x)\\&\lesssim 2^ir\mathcal{M}_2\tilde{g}_\beta f(x).\end{aligned}$$

□

A.3.4 L^p-boundedness of g_β and $\tilde{g}_\beta$, $1 < p \leq 2$

The proof of the L^p-boundedness of g_β for $1 < p < 2$ relies on Theorem A.2.11, via the following lemma:

Lemma A.3.5. *Let (Γ, μ) be a weighted graph satisfying (DV), (LB) and (DUE).*

For all $n \in \mathbb{N}^*$, there exists a constant C_n such that, for all balls $B = B(x_0, r)$ of Γ, all $j \geq 2$ and all $f \in L^1(\Gamma)$ supported in B, we get

$$\left\| g_\beta (I - P^{r^2})^n f \right\|_{L^2(C_j(B))} \leq C_n 2^{-2jn} \frac{V(2^j B)^{\frac{1}{2}}}{V(B)} \|f\|_{L^1}.$$

Proof. The proof of Lemma A.3.5 is very similar to the one of Lemma A.3.3, and we will therefore by sketchy. First, we still have

$$\left\| g_\beta (I - P^{r^2})^n f \right\|_{L^2(C_j(B))} \leq \sum_{k \geq 0} a_k \left(\sum_{l \geq 1} l^{2\beta - 1} \left\| (I - P)^{1+\eta} P^{k+l-1} (I - P^{r^2})^n f \right\|^2_{L^2(C_j(B))} \right)^{\frac{1}{2}}$$

where a_k is defined as in the proof of A.3.3.

1- Estimate of the inner term

Let $B = B(x_0, r)$. As in Lemma A.3.3 and using (GT_2),

$$\begin{aligned}
&\|(I - P)^{1+\eta} P^{k+l-1} (I - P^{r^2})^n f\|_{L^2(C_j(B))} \\
&\qquad \lesssim r^{2n} \sup_{s \in [\![0, nr^2]\!]} \|(I - P)^{1+\eta+n} P^{k+l+s-1} f\|_{L^2(C_j(B))} \\
&\qquad \lesssim l^{-\eta} r^{2n} \|f\|_{L^1(B)} \sup_{s \in [\![0, nr^2]\!]} \left(\frac{1}{V(x_0, \sqrt{l+k+s})^{\frac{1}{2}}} \frac{\exp\left(-c \frac{4^j r^2}{l+k+s}\right)}{(l+k+s)^{1+n}} \right) \qquad \text{(A.23)} \\
&\qquad \lesssim l^{-\eta} r^{2n} \frac{V(2^j B)^{\frac{1}{2}}}{V(B)} \|f\|_{L^1} \sup_{s \in [\![0, nr^2]\!]} \left(\frac{\exp\left(-\frac{c}{2} \frac{4^j r^2}{l+k+s}\right)}{(l+k+s)^{1+n}} \right)
\end{aligned}$$

where we use for the second line the following fact, consequence of (DV)

$$\frac{V(B)}{V(x_0, \sqrt{l+k+s})} \lesssim \left(1 + \frac{r^2}{l+k+s} \right)^{\frac{d}{2}} \lesssim \exp\left(\frac{c}{2} \frac{4^j r^2}{l+k+s} \right).$$

2/3- Conclusion

The proof is then the same (with obvious modifications) as the proof of Lemma A.3.3, using the same sequence $A_l^{k,r,j}$ as in the proof of Lemma A.3.3.

□

We can now conclude for the L^p-boundedness of g_β and $\tilde{g}_\beta$ for $1 < p < 2$.

Proof. (L^p-boundedness and weak $(1,1)$ type of g_β for $1 < p < 2$)
We apply Theorem A.2.11. It is enough to check (A.16) and (A.17) with $g(j) = 2^{-j}$. We take $A_B = P^{r^2}$ where r is the radius of B. The inequality (A.16) is then a consequence of Lemma A.3.5 for $n = 1$. For the estimate (A.17), it suffices to prove that, for all balls B of Γ, all $j \geq 1$, and all f supported in B,

$$\|P^{r^2} f\|_{L^2(C_j(B))} \lesssim \frac{V(2^{j+1} B)^{\frac{1}{2}}}{V(B)} e^{-c4^j} \|f\|_{L^1(B)}.$$

The case $j \geq 2$ is a consequence of (GT_2) and (DV), while the case $j = 1$ follows from (UE) and (A.45). □

Proof. (L^p-boundedness and weak $(1,1)$ type of $\tilde{g}_\beta$)
For $\beta > 0$, the proof is the analogous to the one of the L^p-boundedness of g_β, using (GGT_2) instead of (GT_2).

The case $\beta \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right]$ is analogous, with minor changes identical to the corresponding case in the proof of L^p-boundedness of $\tilde{g}_\beta$ for $p > 2$.

□

A.3.5 Reverse L^p inequalities for g_β and $\tilde{g}_\beta$

Let us now end up the proof of Theorem A.1.13. What remains to be proved is:

Theorem A.3.6. *Let (Γ,μ) be a weighted graph satisfying (DV), (LB) and (DUE). For all $1<p<+\infty$ and $\beta>0$, there exist three constants $C_1,C_2,C_3>0$ such that*

$$\|f\|_{L^p}\leq C_1\|g_\beta f\|_{L^p}\leq C_2\|g_\beta^2 f\|_{L^p}\leq C_3\|f\|_{L^p}\qquad \forall f\in L^p(\Gamma)\cap L^2(\Gamma).$$

Remark A.3.7. *Notice that Theorem A.3.6 implies Theorem A.1.13 for g_β. A statement analogous to Theorem A.3.6 holds with $\tilde{g}_\beta$, with the same proof, which ends the proof of Theorem A.1.13.*

Proof. By Lemma A.6.1, we get

$$g_\beta^2 f(x)\simeq g_\beta(I+P)^\beta f(x)\qquad \forall f\in L^p(\Gamma)\cap L^2(\Gamma),\ \forall x\in\Gamma.$$

As a consequence of this fact and Remark A.1.3, for all $p\in(1,+\infty)$, we have the inequalities

$$\|g_\beta^2 f\|_{L^p}\lesssim\|g_\beta(I+P)^\beta f\|_{L^p}\lesssim\|(I+P)^\beta f\|_{L^p}\lesssim\|f\|_{L^p}. \tag{A.24}$$

The proof will then be complete if we establish, for all $1<p<+\infty$,

$$\|f\|_{L^p}\leq\|g_\beta^2 f\|_{L^p}\qquad \forall f\in L^p(\Gamma)\cap L^2(\Gamma). \tag{A.25}$$

Indeed, assume that (A.25) is established. The conjunction of (A.24) and (A.25) provide the equivalences

$$\|g_\beta^2 f\|_{L^p}\simeq\|f\|_{L^p}\qquad \forall f\in L^p(\Gamma)\cap L^2(\Gamma)$$

and

$$\|g_\beta f\|_{L^p}\simeq\|f\|_{L^p}\qquad \forall f\in A=\{(I+P)^\beta g,\ g\in L^p\cap L^2\}$$

and it is therefore enough to check that A is dense in $L^p(\Gamma)$.
To that purpose, notice that (A.24) and (A.25) also provide the equivalence $\|(I+P)^\beta f\|_{L^p(\Gamma)}\simeq\|f\|_{L^p(\Gamma)}$ for all $f\in L^2(\Gamma)\cap L^p(\Gamma)$, then for all $f\in L^p(\Gamma)$ by the L^p-boundedness of $(I+P)^\beta$ and since $L^2(\Gamma)\cap L^p(\Gamma)$ is dense in $L^p(\Gamma)$. This entails that $(I+P)^\beta$ is one-to-one on $L^{p'}(\Gamma)$ (with $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$), which implies that A is dense in $L^p(\Gamma)$.
The inequality (A.25) can be proven by duality. Actually, for all $f,h\in L^2(\Gamma)$, Lemma A.3.1 shows that

$$\begin{aligned}4<f,h>&=\|f+h\|_2^2-\|f-h\|_2^2\\&=\|g_\beta^2(f+h)\|_2^2-\|g_\beta^2(f-h)\|_2^2\\&\leq\|g_\beta^2 f+g_\beta^2 h\|_2^2-\|g_\beta^2 f-g_\beta^2 h\|_2^2\\&=4<g_\beta^2 f,g_\beta^2 h>.\end{aligned}$$

For the third line, notice that

$$g_\beta^2 f-g_\beta^2 h\leq g_\beta^2(f-h),$$

and interverting the roles of f and h, we obtain

$$\left|g_\beta^2 f-g_\beta^2 h\right|\leq g_\beta^2(f-h),$$

so that

$$\left\|g_\beta^2 f-g_\beta^2 h\right\|_{L^2}\leq\left\|g_\beta^2(f-h)\right\|_{L^2}.$$

Thus, if $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, we have for all $f\in L^p(\Gamma)\cap L^2(\Gamma)$, $1<p<+\infty$,

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^p(\Gamma)}&=\sup_{\substack{h\in L^2\cap L^{p'}\\ \|h\|_{L^{p'}}\leq 1}}<f,h>\\&\leq\sup_{\substack{h\in L^2\cap L^{p'}\\ \|h\|_{L^{p'}}\leq 1}}<g_\beta^2 f,g_\beta^2 h>\\&\leq\|g_\beta^2 f\|_{L^p}\sup_{\substack{h\in L^2\cap L^{p'}\\ \|h\|_{L^{p'}}\leq 1}}\|g_\beta^2 h\|_{L^{p'}}\\&\lesssim\|g_\beta^2 f\|_{L^p}\sup_{\substack{h\in L^2\cap L^{p'}\\ \|h\|_{L^{p'}}\leq 1}}\|h\|_{L^{p'}}\\&=\|g_\beta^2 f\|_{L^p}\end{aligned}$$

where the third line is a consequence of Hölder inequality and the fourth one follows from the boundedness of g_β^2 on $L^{p'}(\Gamma)$. We obtain the desired result

$$\|f\|_{L^p} \lesssim \|g_\beta^2 f\|_{L^p}.$$

$\square$

A.4 L^p-boundedness of $\tilde{g}_0$, $1 < p < 2$

Define, for all $q \in (1,2]$ and all functions f on Γ,

$$\tilde{N}_q f := qf\Delta f - f^{2-q}\Delta f^q$$

and, for all functions $u_n : \mathbb{N} \times \Gamma \to \mathbb{R}$,

$$N_q u_n := qu_n[\partial_n + \Delta]u_n - u_n^{2-q}[\partial_n + \Delta]u_n^q = \tilde{N}_q u_n + qu_n\partial_n u_n - u_n^{2-q}\partial_n u_n^q.$$

Here and after, $\partial_n u_n = u_{n+1} - u_n$ for all $n \in \mathbb{N}$.

Remark A.4.1. – *Dungey proved in [Dun08] that* $0 \le \tilde{N}_q(f) \le \frac{q}{2}|\nabla f|^2$.
– *The Young inequality shows at once that*

$$\partial_n u_n^q \ge q u_n^{q-1}\partial_n u_n, \tag{A.26}$$

and then $N_q(u_n) \le \tilde{N}_q(u_n)$.
– *As will be shown in Proposition A.4.8 below,* $N_q(P^n f) \ge 0$ *for all nonnegative functions* f *and all* $n \in \mathbb{N}$.

We also introduce the functional

$$\tilde{g}_{0,q} f(x) = \left(\sum_{n\ge 0} N_q(P_n f)(x)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Theorem A.4.2. *If* $q \in (1,2]$*, then there exists a constant* $c > 0$ *such that*

$$\|\tilde{g}_{0,q} f\|_q \le c\|f\|_q$$

for all nonnegative functions $f \in L^q$.

Corollary A.4.3. *Let* (Γ, μ) *be a graph satisfying* (LB) *and* (LDV) *and let* $q \in (1,2]$ *Then there exists* $c_q > 0$ *such that*

$$\|\nabla P^n f\|_q \le \frac{c_q}{\sqrt{n}}\|f\|_q$$

Remark A.4.4. *In [Dun08], using semigroup arguments, Dungey proved the conclusion of Corollary A.4.3 under the weaker assumption that* -1 *does not belong to the* L^2 *spectrum of* P.

A.4.1 Proof of Theorem A.4.2

The proof of this result is based on Stein's argument in [Ste70b], Chapter II, also used in Riemannian manifolds in [CDL03] and on graphs with continuous time functionals in [Dun08].
Let us first state the maximal ergodic theorem for Markov kernels (see [Ste61], see also [Ste70b], Chapter IV, Theorems 6 and 9):

Lemma A.4.5. *Let* (X, m) *be a measurable space. Assume that* P *is a linear operator simultaneously defined and bounded from* $L^1(X)$ *to itself and from* $L^\infty(X)$ *to itself that satisfies*

i. P *is self adjoint,*

ii. $\|P\|_{L^1 \to L^1} \le 1$.

Let $f^*(x) = \sup_{n\geq 0} |P^n f(x)|$. *Then there exists a constant* $c_q > 0$ *such that*

$$\|f^*\|_q \leq c_q \|f\|_q$$

for all $q \in (1, +\infty]$.

We can now turn to the proof of Theorem A.4.2.
If $u_n = P^{n-1}f$, then $[\partial_n + \Delta]u_n = 0$ and, as will be proved in Proposition A.4.8 below, one has

$$N_q u_n = -u_n^{2-q}[\partial_n + \Delta]u_n^q \geq 0. \tag{A.27}$$

Consequently, we have

$$\begin{aligned}\tilde{g}_{0,q}f(x)^2 = \sum_{n\geq 0} N_q(P^n f)(x) &= -\sum_{n\geq 0}[P^n f(x)]^{2-q}[\partial_n + \Delta]([P^n f(x)]^q) \\ &\leq -f^*(x)^{2-q}\sum_{n\geq 0}[\partial_n + \Delta]([P^n f(x)]^q).\end{aligned}$$

It follows, with $J(x) = -\sum_{n\geq 0}[\partial_n + \Delta]([P^n f(x)]^q) \geq 0$,

$$\begin{aligned}\|\tilde{g}_{0,q}f\|_q^q &\leq \sum_{x\in\Gamma} f^*(x)^{\frac{(2-q)q}{2}} J(x)^{\frac{q}{2}} m(x) \\ &\leq \left(\sum_{x\in\Gamma} f^*(x)^q m(x)\right)^{\frac{2-q}{2}} \left(\sum_{x\in\Gamma} J(x)m(x)\right)^{\frac{q}{2}}.\end{aligned} \tag{A.28}$$

Yet, by Lemma A.4.5,

$$\left(\sum_{x\in\Gamma} f^*(x)^q m(x)\right) \lesssim \|f\|_q^q. \tag{A.29}$$

Besides, note that (A.27) implies that $-[\partial_n + \Delta][P^n f]^q \geq 0$. By Fubini's theorem, one has

$$\sum_{x\in\Gamma} J(x)m(x) = -\sum_{n\geq 0}\sum_{x\in\Gamma}[\partial_n + \Delta][P^n f]^q m(x).$$

Since $[P^n f]^q \in L^1(\Gamma)$ and $\sum_{x\in\Gamma} \Delta g(x)m(x) = 0$ for all $g \in L^1(\Gamma)$, we have then

$$\begin{aligned}\sum_{x\in\Gamma} J(x)m(x) &= -\sum_{n\geq 0}\sum_{x\in\Gamma} \partial_n[P^n f(x)]^q m(x) \\ &= -\sum_{n\geq 0}\left[\|P^{n+1}f\|_q^q - \|P^n\|_q^q\right] \\ &\leq \|f\|_q^q.\end{aligned} \tag{A.30}$$

Using (A.28), (A.29) and (A.30), we thus obtain the conclusion of Theorem A.4.2.

A.4.2 Proof of Theorem A.1.14

Recall some facts proved by Dungey in [Dun08]. Define the "averaging" operator A by setting

$$(Af)(x) = \sum_{y\in B(x,2)} f(y) = \sum_{y\sim x} f(y)$$

for $x \in \Gamma$ and functions $f : \Gamma \to \mathbb{R}$.

Proposition A.4.6. *Suppose that* (Γ,μ) *satisfies property* (LDV), *and let* $q\in(1,2]$. *There exists* $c_q>0$ *such that*

$$|\nabla f|^2(x)\le c_q\, A(\tilde N_q f)(x)$$

for all $x\in\Gamma$ *and all nonnegative functions* $f\in L^q$. *Moreover, there exists* $c'_q>0$ *such that*

$$\|AF\|_{\frac q2}\le c'_q\|F\|_{\frac q2} \tag{A.31}$$

for all nonnegative functions F *on* Γ.

Remark A.4.7. *The first part of the previous proposition was stated by Dungey for all nonnegative functions* $0\le f\in L^\infty(\Gamma)$. *However, since the estimate is a local one, we only need* $f\in L^\infty_{loc}(\Gamma)\supset L^q(\Gamma)$.

Note that $\frac q2\le 1$ in (A.31), and that we use the notation $\|F\|_r := \left(\sum_{x\in\Gamma} m(x)|F(x)|^r\right)^{\frac1r}$ for $r\in(0,1]$.

In order to prove Theorem A.1.14, we need the following result.

Proposition A.4.8. *Let* (Γ,μ) *be a weighted graph and let* $q\in(1,2]$. *Then* $N_q(P^nf)\ge 0$ *for all functions* $0\le f\in L^q$.

Moreover, if (Γ,μ) *satisfies* (LB), *there exists a constant* $c_q>0$ *such that*

$$0\le \tilde N_q(P^nf)\le c_qN_q(P^nf).$$

Proof. (Theorem A.1.14)

Proposition A.4.6 yields the pointwise estimate

$$|\nabla P^nf|^2\lesssim A(\tilde N_q(P^nf))$$

for $0\le f\in L^q$, so that, by Proposition A.4.8,

$$\begin{aligned}(\tilde g_0 f)^2 &= \sum_{n\ge0}|\nabla P^nf|^2\\ &\lesssim \sum_{n\ge0} A(N_q(P^nf))\\ &= A\left(\sum_{n\ge0}N_q(P^nf)\right) = A\left(\tilde g_{0,q}f\right)^2.\end{aligned}$$

Theorem A.4.2 and (A.31) provide the conclusion of Theorem A.1.14 for all nonnegative functions f. We obtain then L^q-boundedness of $\tilde g_0$ by subadditivity of $\tilde g_0$. ☐

It remains to prove Proposition A.4.8.

Proof. (Proposition A.4.8)

Taylor expansion of the function $t\mapsto t^q$, $q\in(1,2]$, gives

$$\begin{aligned}t^q-s^q &= qs^{q-1}(t-s)+q(q-1)\int_s^t \tau^{q-2}(t-\tau)d\tau\\ &= qs^{q-1}(t-s)+q(q-1)(t-s)^2\int_0^1\frac{(1-u)du}{((1-u)s+ut)^{2-q}}\end{aligned} \tag{A.32}$$

for $t,s\ge0$ with $s\ne t$. From this expansion, one has, for $q\in(1,2]$, $0\le g$ and $x\in\Gamma$,

$$\begin{aligned}\tilde N_q(g)(x) &= \sum_{y\in\Gamma}p(x,y)m(y)\left[qg(x)(g(x)-g(y))-g(x)^{2-q}(g(x)^q-g(y)^q)\right]\\ &= q(q-1)\sum_{y:\, g(y)\ne g(x)}p(x,y)m(y)(g(x)-g(y))^2\int_0^1\frac{(1-t)g(x)^{2-q}}{((1-t)g(x)+tg(y))^{2-q}}dt\\ &= q(q-1)g(x)^{2-q}\int_0^1(1-t)\sum_{y:\, g(y)\ne g(x)}p(x,y)m(y)\frac{(g(x)-g(y))^2}{((g(x)+t(g(y)-g(x))^{2-q}}dt.\end{aligned} \tag{A.33}$$

Let $f \geq 0$ and $n \in \mathbb{N}$. Define $g := P^n f$ and notice $g \geq 0$. Therefore,

$$\partial_n(P^n f)(x) = (P-I)g(x) = \sum_{y\sim x} p(x,y)m(y)(g(y)-g(x))$$

and with (A.32), one has

$$\begin{aligned}\partial_n(P^n f(x))^q - &q(P^n f(x))^{q-1}\partial_n(P^n f)\\ &= q(q-1)((P-I)g(x))^2 \int_0^1 \frac{(1-t)dt}{(g(x)+t(P-I)g(x))^{2-q}}\end{aligned}$$

so that

$$\begin{aligned}[\tilde{N}_q - N_q]g(x) &= g(x)^{2-q}\partial_n(P^n f(x))^q - qg(x)\partial_n(P^n f)\\ &= q(q-1)g(x)^{2-q}\int_0^1 (1-t)\frac{((P-I)g(x))^2}{(g(x)+t(P-I)g(x))^{2-q}}dt\end{aligned}$$

If $g(x)=0$, then $N_q(g)(x) = [\tilde{N}_q - N_q]g(x) = 0$, therefore the conclusion of Proposition A.4.8 holds at x. Assume now that $g(x) \neq 0$. Define, for all $y \in \Gamma$, $h(y) = \frac{g(y)-g(x)}{g(x)} \geq -1$ and, for all $t \in (0,1)$ and all $s \in [-1,+\infty)$,

$$\mathcal{F}_t(s) = \frac{s^2}{(1+ts)^{2-q}}.$$

One has

$$\tilde{N}_q(g)(x) = q(q-1)g(x)^{2-q}\int_0^1 (1-t)\sum_{y\colon g(y)\neq g(x)} p(x,y)m(y)\mathcal{F}_t(h(y))dt$$

and

$$[\tilde{N}_q - N_q]g(x) = q(q-1)g(x)^{2-q}\int_0^1 (1-t)\mathcal{F}_t\left(\sum_{y\colon g(y)\neq g(x)} p(x,y)m(y)h(y)\right)dt.$$

Assume for a while that it is known that $\mathcal{F}_t$ is convex on $[-1,+\infty)$ for all $t \in (0,1)$, and let us conclude the proof of Proposition A.4.8. One has $\tilde{N}_q(g)(x) \geq [\tilde{N}_q - N_q]g(x)$, which means that $N_q(g)(x) \geq 0$. Moreover, since $p(x,x) > \epsilon$, then $\sum_{y\colon g(y)\neq g(x)} \frac{p(x,y)m(y)}{1-\epsilon} \leq 1$, so that

$$\begin{aligned}\sum_{y\colon g(y)\neq g(x)} \frac{p(x,y)m(y)}{1-\epsilon}\mathcal{F}_t(h(y)) &\geq \mathcal{F}_t\left(\sum_{y\colon g(y)\neq g(x)} \frac{p(x,y)m(y)}{1-\epsilon}h(y)\right)\\ &\geq (1-\epsilon)^{-q}\mathcal{F}_t\left(\sum_{y\colon g(y)\neq g(x)} p(x,y)m(y)h(y)\right),\end{aligned}$$

where the first inequality is due to the convexity of $\mathcal{F}_t$ and the last one to the definition of $\mathcal{F}_t$. We deduce

$$[\tilde{N}_q - N_q]g(x) \leq (1-\epsilon)^{q-1}\tilde{N}_q(g)(x),$$

which means

$$\tilde{N}_q(g)(x) \leq \frac{1}{1-(1-\epsilon)^{q-1}}N_q(g)(x).$$

□

It remains to prove the following lemma

Lemma A.4.9. *The function $\mathcal{F}_t$ is convex on $[-1,+\infty)$ for all $t \in (0,1)$.*

Proof. Let $F(x) = \frac{x^2}{(1+x)^{2-q}}$. Easy computations show that F is convex on $(-1,+\infty)$. Since, for all $t \in (0,1)$, $\mathcal{F}_t = \frac{1}{t^2}F(tx)$, $\mathcal{F}_t$ is convex on $(-\frac{1}{t},+\infty) \supset [-1,+\infty)$. □

A.4.3 Proof of Corollary A.4.3

First we will prove the following result. If $q \in (1,2]$, $n \in \mathbb{N}^*$ with $n \geq 1$ and $0 \leq f \in L^1 \cap L^\infty$, one has

$$\|N_q^{\frac{1}{2}}(P^n f)\|_q \leq \frac{c_q}{\sqrt{n}}\|f\|_q \tag{A.34}$$

Let $u_n = P^n f$ and $J_n := -(\partial_n + \Delta)(u_n^q)$. Then

$$\begin{aligned}\|N_q^{\frac{1}{2}}(P^n f)\|_q^q &= \sum_{x\in\Gamma} m(x) N_q^{q/2}(u_n)(x) \\ &= \sum_{x\in\Gamma} m(x) u_n^{\frac{q(2-q)}{2}} J_n(x)^{q/2} \\ &\leq \left[\sum_{x\in\Gamma} m(x) u_n(x)^q\right]^{\frac{2-q}{2}} \left[\sum_{x\in\Gamma} J_n(x) m(x)\right]^{\frac{q}{2}}\end{aligned} \tag{A.35}$$

where the last step follows from Hölde inequality. Yet,

$$\sum_{x\in\Gamma} m(x) u_n(x)^q = \|P^n f\|_q^q \leq \|f\|_q^q$$

and

$$\begin{aligned}\sum_{x\in\Gamma} J_n(x) m(x) &= -\sum_{x\in\Gamma} \partial_n(u_n^q)(x) m(x) \\ &\leq -q \sum_{x\in\Gamma} m(x) u_n^{q-1}(x) \partial_n u_n(x) \\ &\leq q \|u_n\|_q^{q/q'} \|\partial_n u_n\|_q\end{aligned}$$

where the first line holds because $\sum_{x\in\Gamma} \Delta g(x) m(x) = 0$ if $g \in L^1$, the second line follows from (A.26), and the third one from Hölder inequality again (with $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$). Here $\|u_n\|_q \leq \|f\|_q$ while $\|\partial_n u_n\|_q = \|\Delta u_n\|_q \lesssim \frac{1}{n}\|f\|_q$ by the analyticity of P on L^q. Thus

$$\sum_{x\in\Gamma} J_n(x) m(x) \lesssim \frac{1}{n}\|f\|_q^q$$

Substitution of the last two estimates in (A.35) gives

$$\|N_q^{\frac{1}{2}}(P^n f)\|_q \lesssim \frac{1}{\sqrt{n}}\|f\|_q,$$

which ends the proof of (A.34).
Now just use Propositions A.4.6 and A.4.8 to get Corollary A.4.3.

A.5 Appendix: Further estimates for Markov chains

A.5.1 Time regularity estimates

The theorem we prove here is slightly more general than (and clearly implies) Theorem A.2.4.

Theorem A.5.1. *Let (Γ, μ) be a weighted graph satisfying (LB), (DV) and (DUE). Then, for all $j \geq 0$, there exist two constants $C_j, c_j > 0$ such that, for all $(r_1, \dots, r_j) \in \mathbb{N}^{*j}$ for all $l \geq \max_{i\leq j} r_i$ and all $x, y \in \Gamma$,*

$$|(D(r_1)\dots D(r_j)p)_l(x,y)| \leq \frac{C_j r_1 \dots r_j}{l^j V(x,\sqrt{l})^{\frac{1}{2}} V(y,\sqrt{l})^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-c_j \frac{d^2(x,y)}{l}\right).$$

We first recall the following result (Lemma 2.1 in [Dun06]).

Lemma A.5.2. *Let P be a power bounded and analytic operator in a Banach space X. For each $j \in \mathbb{N}$ and $p \in (1, +\infty)$, there exists a constant $c_j > 0$ such that*

$$\|(I - P^{r_1})(I - P^{r_2}) \dots (I - P^{r_j})P^l\|_{p \to p} \leq c_j r_1 \dots r_j l^{-j}$$

for all $j_1, \dots, j_k \in \mathbb{N}$, all $(r_1, \dots, r_j) \in \mathbb{N}^j$ and all $l \in \mathbb{N}^*$.

Proof. let us now establish Theorem A.5.1. We follow closely the proof of Theorem 1.1 of [Dun06], arguing by induction on j.
The case $j = 0$ is obvious since the result is the assumption. The case $j = 1$ and $r_1 = 1$ is the one proven by Dungey in [Dun06] and we will just here verify that the proof for $j = 1$ can be extended to all $j \in \mathbb{N}$. Assume now that, for some $j \in \mathbb{N}$, the kernel p_l satisfies for all $(r_1, \dots, r_j) \in \mathbb{N}^{*j}$ and all $l \geq \max_i r_i$

$$|D(r_j) \dots D(r_1) p_l(x, y)| \leq \frac{C_j r_1 \dots r_j}{l^j V(x, \sqrt{l})^{\frac{1}{2}} V(y, \sqrt{l})^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-c_j \frac{d^2(x, y)}{l}\right) \tag{A.36}$$

where the constant C_j depends only of the graph Γ and j.
Let $(r_1, \dots, r_{j+1}) \in \mathbb{N}^{*(j+1)}$. We then use the abstract identity (which can easily be proved by induction on k) for all linear operators A and all $k \in \mathbb{N}$:

$$I - A = 2^{-(k+1)}(I - A^{2^{k+1}}) + \sum_{i=0}^{k} 2^{-(i+1)}(I - A^{2^i})^2 \tag{A.37}$$

where I denotes the identity operator. Hence we have, applying (A.37) with $(Au)_l = u_{l+r_{j+1}}$,

$$D(r_{j+1}) = 2^{-(k+1)} D(2^{k+1} r_{j+1}) + \sum_{i=0}^{k} 2^{-(i+1)} D(2^i r_{j+1})^2$$

and if we apply this formula to $(D(r_j) \dots D(r_1)p)_l$, we obtain, for all $l \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$ and $x, y \in \Gamma$,

$$\begin{aligned} |D(r_{j+1}) \dots D(r_1) p_l(x, y)| &\leq 2^{-(k+1)} |D(2^{k+1} r_{j+1}) D(r_j) \dots D(r_1) p_l(x, y)| \\ &\quad + \sum_{i=0}^{k} 2^{-(i+1)} |D(2^i r_{j+1})^2 D(r_j) \dots D(r_1) p_l(x, y)|. \end{aligned} \tag{A.38}$$

Suppose that $0 < 2^k r_{j+1} \leq l$, hence $l + 2^{k+1} r_{j+1} \leq 3l$ and (A.36) provides the estimate

$$\begin{aligned} &|D(2^{k+1} r_{j+1}) D(r_j) \dots D(r_1) p_l(x, y)| \\ &\qquad \leq |D(r_j) \dots D(r_1) p_l(x, y)| + |D(r_j) \dots D(r_1) p_{l + 2^{k+1} r_{j+1}}(x, y)| \\ &\qquad \leq C_j \frac{r_1 \dots r_j}{l^j V(x, \sqrt{l})^{\frac{1}{2}} V(y, \sqrt{l})^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-c_j \frac{d^2(x, y)}{3l}\right). \end{aligned} \tag{A.39}$$

Besides, observe that

$$\begin{aligned} &|D(n)^2 D(r_j) \dots D(r_1) p_l(x, y)| \\ &\qquad = \|(I - P^n)^2 (I - P^{r_j}) \dots (I - P^{r_1}) P^l\|_{L^1(\{y\}) \to L^\infty(\{x\})} \\ &\qquad \leq \|P^{l_1}\|_{L^2 \to L^\infty(\{x\})} \|(I - P^n)^2 (I - P^{r_j}) \dots (I - P^{r_1}) P^{l_2}\|_{2 \to 2} \|P^{l_3}\|_{L^1(\{y\}) \to L^2}. \end{aligned} \tag{A.40}$$

whenever $l = l_1 + l_2 + l_3$. Moreover, let us notice that for all $l_0 \in \mathbb{N}^*$ and all $z \in \Gamma$, (DUE) provides

$$\begin{aligned} \|P^{l_0}\|_{L^2 \to L^\infty(\{x\})} = \|P^{l_0}\|_{L^1(\{x\}) \to L^2} &= \left(\sum_{y \in \Gamma} [p_{l_0}(x, y)]^2 m(y)\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= p_{2l_0}(x, x)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{C}{V(x, \sqrt{l_0})^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned} \tag{A.41}$$

The two last results ((A.40) and (A.41)) combined with Lemma A.5.2 and the doubling property (DV) give, with $l_1, l_2, l_3 \sim \frac{l}{3}$

$$|D(n)^2 D(r_j) \dots D(r_1) p_l(x,y)| \le C'_j \frac{n^2 r_1 \dots r_j}{l^{j+2} V(x,\sqrt{l})^{\frac{1}{2}} V(y,\sqrt{l})^{\frac{1}{2}}}. \tag{A.42}$$

Collecting estimates (A.38), (A.39) and (A.42) and using that $\sum_{i=0}^{k} 2^{i-1} \le 2^k$, we obtain

$$\begin{aligned}
|D(r_{j+1}) \dots D(r_1) p_l(x,y)| &\lesssim 2^{-(k+1)} \frac{r_1 \dots r_j}{l^j V(x,\sqrt{l})^{\frac{1}{2}} V(y,\sqrt{l})^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-c_j \frac{d^2(x,y)}{3l}\right) \\
&\quad + \sum_{i=0}^{k} 2^{-(i+1)} \frac{2^{2i} r_{j+1}^2 r_j \dots r_1}{l^{j+2} V(x,\sqrt{l})^{\frac{1}{2}} V(y,\sqrt{l})^{\frac{1}{2}}} \\
&\lesssim 2^{-(k+1)} \frac{r_1 \dots r_j}{l^j V(x,\sqrt{l})^{\frac{1}{2}} V(y,\sqrt{l})^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-c_j \frac{d^2(x,y)}{3l}\right) \\
&\quad + \frac{2^k r_1 \dots r_j r_{j+1}^2}{l^{j+2} V(x,\sqrt{l})}
\end{aligned}$$

for all $l \ge 1$, $k \in \mathbb{N}$ with $2^k r_{j+1} \le l$.

We will now choose k to obtain the desired inequality. If l, j, x, y satisfy

$$l \exp\left(-c_j \frac{d^2(x,y)}{4l}\right) \ge r_{j+1}.$$

We choose k such that

$$2^k r_{j+1} \le l \exp\left(-c_j \frac{d^2(x,y)}{4l}\right) < 2^{k+1} r_{j+1}$$

which gives

$$|D(r_{j+1}) \dots D(r_1) p_l(x,y)| \lesssim \frac{r_1 \dots r_{j+1}}{l^{j+1} V(x,\sqrt{l})^{\frac{1}{2}} V(y,\sqrt{l})^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{c_j}{12} \frac{d^2(x,y)}{l}\right).$$

In the other case, i.e. $l \exp\left(-c_j \frac{d^2(x,y)}{4l}\right) \le r_{j+1}$, observe that by (A.36)

$$\begin{aligned}
&|D(r_{j+1}) \dots D(r_1) p_l(x,y)| \\
&\quad \le |D(r_j) \dots D(r_1) p_l(x,y)| + |D(r_j) \dots D(r_1) p_{l+r_{j+1}}(x,y)| \\
&\quad \le C_j \frac{r_1 \dots r_j}{l^j V(x,\sqrt{l})^{\frac{1}{2}} V(y,\sqrt{l})^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-c_j \frac{d^2(x,y)}{l + r_{j+1}}\right) \\
&\quad \le C_j \frac{r_1 \dots r_j}{l^j V(x,\sqrt{l})^{\frac{1}{2}} V(y,\sqrt{l})^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{c_j}{2} \frac{d^2(x,y)}{l}\right) \\
&\quad \le C_j \frac{r_1 \dots r_{j+1}}{l^{j+1} V(x,\sqrt{l})^{\frac{1}{2}} V(y,\sqrt{l})^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{c_j}{4} \frac{d^2(x,y)}{l}\right)
\end{aligned}$$

where the third line holds because $l \ge r_{j+1}$. □

A.5.2 Gaffney-type inequalities

This paragraph is devoted to the proof of Theorem A.2.5. Actually, we establish more general versions in Theorem A.5.3 and Corollary A.5.4.

Theorem A.5.3. *Let (Γ, μ) be a weighted graph. Assume (LB), (DV) and (DUE). Then, for all $j \in \mathbb{N}$, there exist $c, C > 0$ such that for all $(r_1, \dots, r_j) \in \mathbb{N}^j$, for all sets $E, F \subset \Gamma$ and $x_0 \in \Gamma$ such that $\sup\{d(x_0,y),\ y \in F\} \le 3d(E,F)$ and all functions f supported in F,* *(i)* $\|(I-P^{r_1})\dots(I-P^{r_j})P^l f\|_{L^2(E)} \le C\frac{r_1\dots r_j}{l^j}\frac{1}{V(x_0,\sqrt{l})^{\frac12}}e^{-c\frac{d(E,F)^2}{l}}\|f\|_{L^1(F)}$,

for all $(r_1,\dots r_j)\in\mathbb{N}^*$ *and all* $l\ge \max_{i\le j} r_i$.

(ii) $\|\nabla(I-P^{r_1})\dots(I-P^{r_j})P^l f\|_{L^2(E)} \le C\frac{r_1\dots r_j}{l^{j+\frac12}}\frac{1}{V(x_0,\sqrt{l})^{\frac12}}e^{-c\frac{d(E,F)^2}{l}}\|f\|_{L^1(F)}$,

for all $(r_1,\dots r_j)\in\mathbb{N}^*$ *and all* $l\ge \max_{i\le j} r_i$.

(iii) $\|\nabla(I-P^{r_1})\dots(I-P^{r_j})P^l f\|_{L^2(E)} \le C\frac{r_1\dots r_j}{l^{j+\frac12}}e^{-c\frac{d(E,F)^2}{l}}\|f\|_{L^2(F)}$,

for all $(r_1,\dots r_j)\in\mathbb{N}^*$ *and all* $l\ge \max_{i\le j} r_i$.

Corollary A.5.4. *Let (Γ,μ) be a weighted graph satisfying (LB), (DV) and (DUE). The conclusions of Theorem A.5.3 still hold under any of the following assumptions on E,F,x_0 and l:*

1. $\sup\{d(x_0,y),\, y\in F\}\le\sqrt{l}$,
2. $\sup\{d(x_0,x),\, x\in E\}\le 3d(E,F)$,
3. $\sup\{d(x_0,x),\, x\in E\}\le\sqrt{l}$.

The proof of Theorem A.5.3 relies on:

Lemma A.5.5. *Let (Γ,μ) be a weighted graph satisfying (DV), (LB) and (DUE), then we have the following estimates: for all $j\in\mathbb{N}$, there exist $C_j,c_j>0$ such that for all $(r_1,\dots r_j)\in\mathbb{N}^{*j}$ and all $l\ge max_{i\le j}r_i$*

$$\sum_{y\in\Gamma}|\left(D(r_j)\dots D(r_1)p\right)_l(y,x)|^2 e^{c_j\frac{d(x,y)^2}{l}}m(y)\le C_j\frac{r_1^2\dots r_j^2}{l^{2j}V(x,\sqrt{l})} \tag{A.43}$$

and

$$\sum_{y\in\Gamma}|\nabla_y\left(D(r_j)\dots D(r_1)p\right)_l(y,x)|^2 e^{c_j\frac{d(x,y)^2}{l}}m(y)\le C_j\frac{r_1^2\dots r_j^2}{l^{2j+1}V(x,\sqrt{l})}. \tag{A.44}$$

The proof of this Lemma is analogous to Lemmas 4 and 7 in [Rus00], where we use the estimates in Theorem A.5.1 instead of the estimate (UE).

Proof. (Theorem A.5.3)

(i) We can assume without loss of generality that $\|f\|_{L^1}=1$. Then

$$\begin{aligned}
&\|(I-P^{r_1})\dots(I-P^{r_j})P_l f\|^2_{L^2(E)}\\
&=\sum_{x\in E}m(x)\left(\sum_{z\in F}\left(D(r_j)\dots D(r_1)p\right)_l(x,z)f(z)m(z)\right)^2\\
&\le\sum_{x\in E}m(x)\sum_{z\in F}|\left(D(r_j)\dots D(r_1)p\right)_l(x,z)|^2|f(z)|m(z)\\
&\le\exp\left(-c\frac{d(E,F)^2}{l}\right)\sum_{z\in F}|f(z)|m(z)\sum_{x\in E}m(x)|D(r_j)\dots D(r_1)p_l(x,z)|^2\exp\left(c\frac{d(x,z)^2}{l}\right)\\
&\lesssim\frac{r_1^2\dots r_j^2}{l^{2j}}\exp\left(-c\frac{d(E,F)^2}{l}\right)\sum_{z\in F}|f(z)|m(z)\frac{1}{V(z,\sqrt{l})}\\
&\lesssim\frac{r_1^2\dots r_j^2}{l^{2j}V(x_0,\sqrt{l})}\exp\left(-c\frac{d(E,F)^2}{l}\right)
\end{aligned}$$

where, for the 4^{th} line, we use the estimate (A.43) and, for the last line, the doubling property shows

$$\frac{V(x_0,\sqrt{l})}{V(z,\sqrt{l})}\le\frac{V(z,\sqrt{l}+3d(E,F))}{V(z,\sqrt{l})}\lesssim\left(1+\frac{3d(E,F)}{\sqrt{l}}\right)^d\lesssim\exp\left(\frac{c}{2}\frac{d(E,F)^2}{l}\right) \tag{A.45}$$

which leads to the result (with a different value of c).

(ii) Similar to (i) using (A.44) instead of (A.43).

(iii) This result is a consequence of (i). In fact,

$$\begin{aligned}\|\nabla(I-P^{r_1})\dots(I-P^{r_j})P^l f\|_{L^2(E)} &\lesssim \frac{r_1\dots r_j}{l^{j+\frac12}}\frac{1}{V(x_0,\sqrt{l})^{\frac12}}e^{-c\frac{d(E,F)^2}{l}}\|f\|_{L^1(F)}\\ &\leq \frac{r_1\dots r_j}{l^{j+\frac12}}\left(\frac{m(F)}{V(x_0,\sqrt{l})}\right)^{\frac12}e^{-c\frac{d(E,F)^2}{l}}\|f\|_{L^2(F)}\\ &\lesssim \frac{r_1\dots r_j}{l^{j+\frac12}}e^{-c\frac{d(E,F)^2}{l}}\|f\|_{L^2(F)}\end{aligned}$$

where, for the last line, the doubling property yields

$$\frac{m(F)}{V(x_0,\sqrt{l})}\leq\frac{V(x_0,3d(E,F))}{V(x_0,\sqrt{l})}\lesssim\left(1+\frac{3d(E,F)}{\sqrt{l}}\right)^d\lesssim\exp\left(\frac{c}{2}\frac{d(E,F)^2}{l}\right). \tag{A.46}$$

□

Proof. (of Corollary A.5.4)

1. Under this assumption, the proof is analogous to the one of Theorem A.5.3, replacing (A.45) by

$$\frac{V(x_0,\sqrt{l})}{V(z,\sqrt{l})}\lesssim 1 \qquad \forall z\in F,$$

which is provided by (DV) and (A.46) by

$$\frac{m(F)}{V(x_0,\sqrt{l})}\leq 1,$$

which is due to the fact that $F\subset B(x_0,\sqrt{l})$.

2. Decompose $F=\bigcup_{i\geq 0}F_i$, with

$$F_i=F\cap\{y\in\Gamma,\, 3^i d(E,F)\leq d(y,E)<3^{i+1}d(E,F)\}.$$

Remark that, if $F_i\neq\emptyset$,

$$\sup_{y\in F_i}d(x_0,y)\leq(3+3^{i+1})d(E,F)\leq(3+3^{1-i})d(E,F_i)\leq 6d(E,F_i).$$

Let T be one of the operators involved in the left-hand sides in Theorem A.5.3. Let $c_T>0$ be such that, for all $(\tilde{E},\tilde{F})$ such that $\sup_{y\in\tilde{F}}d(x_0,y)\leq 6d(\tilde{E},\tilde{F})$ and all f supported in $\tilde{F}$, we have

$$\|Tf\|_{L^2(\tilde{E})}\leq c_T e^{-c\frac{d(\tilde{E},\tilde{F})^2}{l}}\|f\|_{L^1(\tilde{F})}.$$

(Remember that Theorem A.5.3 can be proven with constant 6 instead of 3.) Then, one has

$$\|Tf\|_{L^2(E)}\leq\sum_{i=0}^{+\infty}\|T(f\mathbb{1}_{F_i})\|_{L^2(E)}\leq c_T\sum_{i=0}^{+\infty}e^{-c\frac{d(E,F_i)^2}{l}}\|f\|_{L^1(F_i)}\leq c_T e^{-c\frac{d(E,F)^2}{l}}\|f\|_{L^1(F)},$$

which proves the second point of the corollary (note that the above sum can be restricted to the indexes i such that $F_i\neq\emptyset$).

3. Let $R=\sup_{x\in E}d(x,x_0)$. Decompose $F=\bigcup_{i\geq 1}F_i$ with

$$F_1=F\cap B(x_0,4R)$$

and if $i\geq 2$

$$F_i=F\cap\{y\in\Gamma,\, 2^iR<d(y,x_0)\leq 2^{i+1}R\}.$$

Write

$$\|Tf\|_{L^2(E)} \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \|T(f\mathbb{1}_{F_i})\|_{L^2(E)}$$

(where T is one of the sublinear operators of Theorem A.5.3 and f is supported in F). We want to estimate each $\|T(f\mathbb{1}_{F_i})\|_{L^2(E)}$. First, notice that $\sup_{x\in F^1}\{d(x,x_0)\} \leq 4R \leq 4\sqrt{l}$. Use then point 1 of Corollary A.5.4 to obtain

$$\begin{aligned}\|T(f\mathbb{1}_{F_1})\|_{L^2(E)} &\leq c_T e^{-c\frac{d(E,F_1)^2}{l}} \|f\|_{L^1(F_1)}\\ &\leq c_T e^{-c\frac{d(E,F)^2}{l}} \|f\|_{L^1(F_1)}.\end{aligned}$$

Next, remark that, if $i \geq 2$ and since $d(E,F_i) \geq (2^i - 1)R$,

$$\sup_{x\in F_i}\{d(x,x_0)\} \leq 2^{i+1}R \leq \frac{2^{i+1}}{2^i-1} d(E,F_i) \leq 3d(E,F_i).$$

Hence, using Theorem A.5.3, one has

$$\begin{aligned}\|T(f\mathbb{1}_{F_i})\|_{L^2(E)} &\leq c_T e^{-c\frac{d(E,F_i)^2}{l}} \|f\|_{L^1(F_i)}\\ &\leq c_T e^{-c\frac{d(E,F)^2}{l}} \|f\|_{L^1(F_i)}.\end{aligned}$$

Summing up over i yields the desired conclusion. □

A.6 Appendix: Estimates for the Taylor coefficients of $(1-z)^{-\beta}$

Lemma A.6.1. *Let $\gamma > -1$. Let $\sum_{l\geq 1} a_l z^l$ be the Taylor series of the function $\frac{1}{(1-z)^{\gamma+1}}$. We have*

$$a_l \simeq l^\gamma \qquad \forall l \in \mathbb{N}^*.$$

A consequence of this result is

$$\sum_{l\geq 0} l^\gamma z^l \simeq \frac{z}{(1-z)^{\gamma+1}} \qquad \forall z \in [0,1).$$

Proof. For $|z| < 1$, the holomorphic function $\frac{1}{(1-z)^{\gamma+1}}$ is equal to its Taylor series,

$$\frac{1}{(1-z)^{\gamma+1}} = \sum_{l\geq 0}\prod_{i=1}^{l}\left(1+\frac{\gamma}{i}\right) z^l \qquad \forall z \in B_{\mathbb{C}}(0,1).$$

Let us check that

$$l^\gamma \simeq \prod_{i=1}^{l}\left(1+\frac{\gamma}{i}\right) \qquad \forall l \geq 1. \tag{A.47}$$

Indeed, one can write

$$\begin{aligned}\ln \prod_{i=1}^{l}\left(1+\frac{\gamma}{i}\right) &= \sum_{i=1}^{l} \ln\left(1+\frac{\gamma}{i}\right)\\ &= \gamma\sum_{i=1}^{l}\frac{1}{i} + \sum_{i=1}^{l}\left[\ln\left(1+\frac{\gamma}{i}\right) - \frac{\gamma}{i}.\right]\end{aligned}$$

Yet, one has

$$\left|\sum_{i=1}^{l}\left[\ln\left(1+\frac{\gamma}{i}\right)-\frac{\gamma}{i}\right]\right| \le \sum_{i=1}^{\infty}\left|\ln\left(1+\frac{\gamma}{i}\right)-\frac{\gamma}{i}\right|$$
$$\lesssim \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\gamma^2}{i^2} < +\infty.$$

Hence we get

$$\ln\prod_{i=1}^{l}\left(1+\frac{\gamma}{i}\right) = \gamma\ln l + O(1),$$

which yields (A.47) by applying the exponential map.
From the last result, and since the convergence radius of the series under consideration are 1, we deduce

$$\begin{aligned}\sum_{l\ge 1} l^{\gamma} z^l &\simeq \sum_{l\ge 1}\prod_{i=1}^{l}\left(1+\frac{\gamma}{i}\right) z^l \qquad \forall z\in[0,1)\\ &= \frac{1}{(1-z)^{\gamma+1}}-1\\ &= \frac{1-(1-z)^{\gamma+1}}{(1-z)^{\gamma+1}}\\ &\simeq \frac{z}{(1-z)^{\gamma+1}}.\end{aligned}$$

□

A.7 Appendix: Reverse Hölder estimates for sequences

For all $M>0$, define the following sets of sequences

$$E_M = \left\{(a_n)_{n\ge 1},\ \forall n,\ 0\le a_n\le M\sum_{k\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{k}a_k\right\}$$

and

$$\tilde{E}_M = \left\{(a_n)_{n\ge 1},\ \forall n,\ 0\le a_n\le M\sum_{k\ge n}\frac{1}{k}a_k\right\}.$$

First, we state this obvious lemma:

Lemma A.7.1.

$$\left(\sum_{n\ge 1}\frac{1}{n}a_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \le M^{\frac{1}{2}}\sum_{n\ge 1}\frac{1}{n}a_n \qquad \forall (a_n)_n\in E_M.$$

Let $\mathcal{A} = \{(A_l^{k,r,j})_{l\in\mathbb{N}^*},\ k\in\mathbb{N},\ r\in\mathbb{N}^*,\ j\ge 2\}$, where

$$A_l^{k,r,j} = l^{\beta-\eta}\sup_{s\in[\![0,nr^2]\!]}\left\{\frac{\exp\left(-c\frac{4^j r^2}{l+k+s}\right)}{(l+k+s)^{1+n}}\right\}.$$

The parameters β and η are chosen as in section A.3 and therefore $\beta-\eta\in(0,1]$.

Proposition A.7.2. *There exists $M>0$ such that $\mathcal{A}\subset E_M$.*

In order to prove Proposition A.7.2, we will need the following Lemmata:

Lemma A.7.3. *One has the next three results:*

i. $\tilde{E}_M \subset E_M$,

ii. *if* $M > 0$ *and* $\{(a_n^p)_n,\ p \in I\}$ *is a set of sequences such that for all* $p \in I$, $(a_n^p)_n \in \tilde{E}_M$, *then* $\left(\sup_{p\in I} a_n^p\right)_n \in \tilde{E}_M$,

iii. *For a positive sequence* λ, *we define, for all sequences* $a \in \mathbb{R}^N$, $\rho_\lambda(a)$ *by*

$$[\rho_\lambda(a)]_n = \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} a_{n+1}.$$

Then, if $(\lambda_n)_n$ *is non decreasing and* $\left(\frac{\lambda_n}{n}\right)_n$ *is non increasing,* $\tilde{E}_M$ *is stable by* ρ_λ.

Proof. (i) and (ii) are easy to prove. Let us check (iii).

Since $(a_n)_n \in \tilde{E}_M$, we have for all $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
[\rho_\lambda(a)]_n &= \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} a_{n+1} \\
&\leq M \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \sum_{k\geq n+1} \frac{1}{k} a_k \\
&= M \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \sum_{k\geq n} \frac{1}{k+1} a_{k+1} \\
&= M \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \sum_{k\geq n} \frac{1}{k} \frac{k\lambda_{k+1}}{(k+1)\lambda_k} [\rho_\lambda(a)]_k \\
&\leq M \sum_{k\geq n} \frac{1}{k} [\rho_\lambda(a)]_k
\end{aligned}$$

because $\left(\frac{\lambda_k}{k}\right)_k$ is non increasing and $(\lambda_n)_n$ is non decreasing. □

Define for $c, \alpha > 0$,

$$A_c^\alpha = \Big\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*},\ \exists n_0 \in \mathbb{N}^* \text{ such that } \forall n < n_0,\ a_n \leq a_{n+1} \\ \text{and } \forall n \geq n_0,\ c a_{n_0} \left(\frac{n_0}{n}\right)^\alpha \leq a_n \leq \frac{1}{c} a_{n_0} \left(\frac{n_0}{n}\right)^\alpha \Big\}.$$

Lemma A.7.4. *For all* $(a_n)_n \in A_c^\alpha$ *and all* $n \geq n_0$ *(where* n_0 *is given by the def of* A_c^α*),*

$$a_n \simeq \sum_{k\geq n} \frac{1}{k} a_k.$$

In particular, there exists M *(only depending on* α *and* c*) such that* $A_c^\alpha \subset \tilde{E}_M$.

Proof. One has if $(a_n)_n \in A_c^\alpha$ and $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k\geq n} \frac{1}{k} a_k &\simeq a_{n_0} n_0^\alpha \sum_{k\geq n} \frac{1}{k^{\alpha+1}} \\
&\simeq a_{n_0} \left(\frac{n_0}{n}\right)^\alpha \\
&\simeq a_n.
\end{aligned}$$

□

We are now ready for the proof of Proposition A.7.2.

Proof. (of Proposition A.7.2)
According to Lemma A.7.3 and Lemma A.7.4, we only need to prove that

$$\mathcal{A}_0 = \left\{ \left(l^{\beta-\eta} \frac{\exp\left(-c\frac{4^j r^2}{l}\right)}{l^{1+n}} \right)_{l\in\mathbb{N}^*}, r \in \mathbb{N}^*, j \geq 2 \right\}$$

is in some A_c^α. Indeed, once we proved $\mathcal{A}_0 \subset A_c^\alpha$, Lemma A.7.4 implies that there exists $M > 0$ such that $\mathcal{A}_0 \subset \tilde{E}_M$. The use of Lemma A.7.3(iii) with $\lambda_l = l^{\beta-\eta}$ yields, since $\beta - \eta \in (0, 1]$,

$$\mathcal{A}_1 := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (\rho_\lambda)^k(\mathcal{A}_0) = \left\{ \left(l^{\beta-\eta} \frac{\exp\left(-c\frac{4^j r^2}{l+k}\right)}{(l+k)^{1+n}} \right)_{l\in\mathbb{N}^*}, r \in \mathbb{N}^*, k \in \mathbb{N}, j \geq 2 \right\} \subset \tilde{E}_M.$$

Lemma A.7.3(ii) thus provides that $\mathcal{A} \subset \tilde{E}_M$ and Lemma A.7.3(i) that $\mathcal{A} \subset E_M$.

It remains to prove that $\mathcal{A}_0 \subset A_c^\alpha$. The result is a consequence of the following facts.

For $\gamma \in [0, 1]$ and $n \geq 1$, the function

$$F : t \in \mathbb{R}_+ \mapsto t^\gamma \frac{\exp\left(-\frac{d}{t}\right)}{t^{n+1}}$$

satisfies

- $F(0) = 0$ and $\lim\limits_{t\to+\infty} F(t) = 0$,
- F reaches its unique maximum at $t_0 = \frac{d}{n+1-\gamma}$,
- $\dfrac{e^{\gamma-n-1}}{t^{n+1-\gamma}} \leq F(t) \leq \dfrac{1}{t^{n+1-\gamma}}$ for all $t \geq t_0$.

□

Remark A.7.5. *If $\beta \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right]$ and*

$$B_l^{k,r,j} = l^{\beta+\frac{1}{2}} \sup_{s\in[\![0,nr^2]\!]} \left\{ \frac{\exp\left(-c\frac{4^j r^2}{l+k+s}\right)}{(l+k+s)^{n+\frac{1}{2}}} \right\},$$

a careful inspection of the proof of Proposition A.7.2 shows that the conclusion of Proposition A.7.2 also holds for $B_l^{k,r,j}$.

Appendix B

Assumption (LB)

B.1 Introduction and statement of the results

The definitions of a graph (Γ, μ), of the measure $m(x)$, of the Markov chain P^l, and of the kernels $p(x, y)$, $p_k(x, y)$ can be found in subsections 2.1 or A.1.1 for

B.1.1 The discrete setting

Definition B.1.1. *We say that $x, y \in \Gamma$ are neighbours in (Γ, μ) if $p(x, y) > 0$. We write $x \sim y$.*

Let $\epsilon \geq 0$. We say that $x, y \in \Gamma$ are ϵ-neighbors if $p(x, y) \min\{m(y), m(x)\} > \epsilon$. We write $x \sim_\epsilon y$.

Definition B.1.2. *A path (joining x to y, of length n) in Γ is a sequence $x = x_0, x_1, \dots, x_n = y$ of vertices of Γ such that $x_{i-1} \sim x_i$ for all $i \in [\![1, n]\!]$. Say that the path is closed if $x = y$.*

Let $\epsilon \geq 0$. An ϵ-safe path (joining x to y, of length n) in Γ is a sequence $x = x_0, x_1, \dots, x_n = y$ of vertices of Γ such that $x_{i-1} \sim_\epsilon x_i$ for all $i \in [\![1, n]\!]$.

Definition B.1.3. *Let $\epsilon \geq 0$. If $x \neq y$, the distance $d_\epsilon(x, y)$ between x and y is the length of the shortest ϵ-safe path linking x to y. If $x = y$, let $d_\epsilon(x, y) = 0$. We write $d_\epsilon(x, y) = +\infty$ if no ϵ-safe path from x to y exists.*

An ϵ-ball $B_\epsilon = B_\epsilon(x_0, r)$ is the set containing all vertices $x \in \Gamma$ such that $d_\epsilon(x, y) < r$.

We also need to define the border of a set.

Definition B.1.4. *The border of a set $E \subset \Gamma$ is the set $\partial E = \{x \in \Gamma, d(x, E) = 1\}$.*

In the same way, the ϵ-border of a set $E \subset \Gamma$ is the set $\partial_\epsilon E = \{x \in \Gamma, d_\epsilon(x, E) = 1\}$.

We use the following assumptions:

Definition B.1.5. *We say that (Γ, μ) (or P) satisfies* (LB) *if there exists $\epsilon = \epsilon_{LB} > 0$ such that*

$$p(x, x) m(x) \geq \epsilon \qquad \forall x \in \Gamma. \tag{LB}$$

Remark B.1.6. *The assumption* (LB) *implies that $-1 \notin Sp_{L^2}(P)$, which implies ([CSC90, p. 426]) that P is analytic in L^q, $1 < q < +\infty$.*

Definition B.1.7. *We say that (Γ, μ) satisfies* (PDV) *if there exists $C_{pdv}, d > 0$ such that*

$$V(x, r) \leq C_{pdv} r^d m(x) \qquad \forall x \in \Gamma, \forall r \in \mathbb{N}^*. \tag{PDV}$$

Remark B.1.8. *Recall the doubling property* (DV)*: there exists $C_{dv} > 0$ such that*

$$V(x, 2r) \leq C_{dv} V(x, r) \qquad \forall x \in \Gamma, \forall r \in \mathbb{N}^*. \tag{DV}$$

Recall also the local doubling property (DVL)*: there exists $C_{dvl} > 0$ such that*

$$V(x, 2) \leq C_{dvl} m(x) \qquad \forall x \in \Gamma, \forall r \in \mathbb{N}^*. \tag{DVL}$$

We have the following implications: (DV) $\Rightarrow$ (PDV) $\Rightarrow$ (DVL).

Remark B.1.9. *The local doubling property implies the existence of a uniform bound N_{dvl} for the number of neighbours of a vertex.*

Definition B.1.10. *A subset $E \subset (\Gamma, \mu)$ is said to be 2-pathed if all closed paths in E are of even length.*

Let $\epsilon \geq 0$. A subset $E \subset (\Gamma, \mu)$ is said to be $(2, \epsilon)$-pathed if all closed ϵ-safe paths in E are of even length.

Remark B.1.11. *If E is 2-pathed, then for all $x \in E$, $p(x, x) = 0$.*

If E is $(2, \epsilon)$-pathed, then for all $x \in E$, $p(x, x)m(x) \leq \epsilon$.

Let us state the following result, proven in subsection B.2.1. Note that, here and after, if $E \subset \Gamma$, by "partition" of E, we mean a collection of pairwise (possibly empty) disjoint subsets of E.

Proposition B.1.12. *The following conditions are equivalent*

(i) *E is $(2, \epsilon)$-pathed.*

(ii) *There exists a partition (E_0, E_1) of E such that if, for some $i \in \{0, 1\}$,*

$$x, y \in E_i \Rightarrow x \not\sim_\epsilon y. \tag{B.1}$$

B.1.2 Main result

Theorem B.1.13. *Let (Γ, μ) be a graph satisfying* (PDV). *The following conditions are equivalent:*

(i) *$-1 \in Sp_{L^q}(P)$ for all $q \in [1, +\infty)$,*

(ii) *$-1 \in Sp_{L^2}(P)$,*

(iii) *for all $k \in \mathbb{N}$, P^{2k+1} does not satisfy* (LB),

(iv) *for all $\epsilon > 0$ and all $r \in \mathbb{N}^*$, there exists an ϵ-ball B_ϵ of radius r that is $(2, \epsilon)$-pathed.*

B.2 Proofs

B.2.1 Proof of Proposition B.1.12

Proof: Let us prove (i) $\Rightarrow$ (ii). We can assume without loss of generality that E is ϵ-connected, that is, for all $x, y \in E$, there exists a ϵ-safe path included in E linking x to y. Indeed, let $A, B \subset \Gamma$ such that $(x, y) \in A \times B$ implies $x \not\sim_\epsilon y$. If (E_0^A, E_1^A) and (E_0^B, E_1^B) are two partitions of respectively A and B satisfying (B.1), then $(E_0^A \cup E_0^B, E_1^A \cup E_1^B)$ and $(E_0^A \cup E_1^B, E_1^A \cup E_0^B)$ are both a partition of $A \cup B$ satisfying (B.1).

Let now E be ϵ-connected. Fix $e \in E$. Define now

$$E_0 = \{x \in E, \text{there exists an } \epsilon\text{-safe path of even length in } E \text{ linking } e \text{ to } x\}$$

and

$$E_1 = \{x \in E, \text{there exists an } \epsilon\text{-safe path of odd length in } E \text{ linking } e \text{ to } x\}.$$

- Since E is ϵ-connected, one has $E_0 \cup E_1 = E$.
- Check that $E_0 \cap E_1 = \emptyset$. Assume the contrary and let $f \in E_0 \cap E_1$. Then, since $f \in E_0$, there exists an integer n and an ϵ-safe path in E such that:

  $$e = x_0, \ldots, x_{2n} = f,$$

  and since $f \in E_1$, there exists an integer m and an ϵ-safe path in E such that:

  $$e = y_0, \ldots, y_{2m+1} = f.$$

  Thus $x_0, \ldots, x_{2n}, y_{2m}, \ldots, y_0$ is a closed ϵ-safe path in E of odd length, which is a contradiction.
- Let $x, y \in E$ such that $x \sim_\epsilon y$. If $x \in E_i$, then there exist an integer n and an ϵ-safe path $e = x_0, \ldots, x_{2n+i} = x$. Consequently, $e = x_0, \ldots, x_{2n+i}, y$ is an ϵ-safe path of length $2n + 1 + i$, and thus $y \in E_{1-i}$.

Let us now turn to the proof of (ii) $\Rightarrow$ (i). Let $e = x_0, \ldots, x_n = e$ be a closed ϵ-safe path in E. Without loss of generality, we can assume $e \in E_0$. Then, for all $k \in [\![0, n]\!]$, $x_k \in E_i$ if and only if $k - i$ is even. As a consequence, since $x_n = e \in E_0$, the integer n is even. As a conclusion, any closed ϵ-safe path in E is of even length. $\square$

B.2.2 First part of the proof of Theorem B.1.13

Proof: [Theorem B.1.13, (i) implies (ii) and (ii) implies (iii)].

(i) implies (ii) is immediate. For the second implication, notice that $-1 \in Sp(P) \Longrightarrow \forall k \in \mathbb{N}, -1 \in Sp(P^{2k+1}) \Longrightarrow \forall k \in \mathbb{N}$, P^{2k+1} does not satisfy (LB). $\square$

Proof: [Theorem B.1.13, (iii) implies (iv)].

Fix $\epsilon > 0$ and $r \in \mathbb{N}^*$.

First step We claim that there exists $x_0 \in \Gamma$ such that there doesn't exist any ϵ-safe path of length $2r-1$ starting from x_0.
Indeed, since P^{2r-1} does not satisfy (LB), there exists $x_0 \in \Gamma$ such that $p_{2r-1}(x_0, x_0)m(x_0) \leq \epsilon^{2r-1}$.
Let $x_0, x_1, \dots, x_{2r-1} = x_0$ be a path of length $2r-1$. One has

$$\prod_{i \in [\![1, 2r-1]\!]} p(x_{i-1}, x_i)m(x_i) \leq p_{2r-1}(x_0, x_0)m(x_0) \leq \epsilon^{2r-1}.$$

Then there exists x_i such that $p(x_{i-1}, x_i)m(x_i) \leq (\epsilon^{2r-1})^{\frac{1}{2r-1}} = \epsilon$ and the path is not a ϵ-safe path.

Second step

In the first step, we proved that there exists $x_0 \in \Gamma$ such that there don't exist any ϵ-safe path of length $2r-1$ starting from x_0.
Define now

$$E_0 = \{x \in B_\epsilon(x_0, r),\ d_\epsilon(x_0, x) \text{ is even}\}$$

and

$$E_1 = \{x \in B_\epsilon(x_0, r),\ d_\epsilon(x_0, x) \text{ is odd}\}.$$

The couple (E_0, E_1) forms a partition of $B(x_0, r)$. Let $x, y \in B_\epsilon(x_0, r)$ such that $x \sim_\epsilon y$. Then $|d_\epsilon(x, x_0) - d_\epsilon(x_0, y)| \leq 1$.
We claim that $|d_\epsilon(x, x_0) - d_\epsilon(x_0, y)| = 1$. Assume indeed that $n := d_\epsilon(x_0, x) = d_\epsilon(x_0, y) < r$. Then there exist two ϵ-safe paths $x_0, \dots, x_n = x$ and $x_0, y_1, \dots, y_n = y$. Thus $x_0, \dots, x_n, y_n, \dots, y_1, x_0$ is an ϵ-safe path of length $2n+1$. We want to extend this ϵ-safe path to a ϵ-safe path of length $2r-1$. Either $n = 0$ and then x_0, x_0 is an ϵ-safe path of length 1, since $x_0 = x = y$, and thus

$$\underbrace{x_0, x_0, \dots, x_0}_{2r \text{ times}}$$

is an ϵ-safe path of length $2r-1$. Or $n > 0$ and x_0, x_1, x_0 is an ϵ-safe path of length 2 and thus

$$\underbrace{x_0, x_1, \dots, x_0, x_1}_{r-n-1 \text{ times}}, x_0, \dots, x_n, y_n, \dots, y_1, x_0$$

is an ϵ-safe path of length $2r-1$.
By contradiction with the first step, one has then

$$|d_\epsilon(x, x_0) - d_\epsilon(x_0, y)| = 1. \tag{B.2}$$

The identity (B.2) yields that $d_\epsilon(x, x_0)$ and $d_\epsilon(x_0, y)$ don't have the same parity, and thus that x and y do not belong to the same E_i.

Conclusion

In the second step, we built a partition (E_0, E_1) of $B(x_0, r)$ such that if $x, y \in B(x_0, r)$ are such that $x \sim_\epsilon y$, then $x \in E_i$ and $y \in E_{1-i}$ for some $i \in \{0, 1\}$. Another way to say this is: (E_0, E_1) is a partition of $B(x_0, r)$ such that if $x, y \in E_i$ for some $i \in \{0, 1\}$, then $x \not\sim_\epsilon y$.
Proposition B.1.12 yields then that $B(x_0, r)$ is $(2, \epsilon)$-pathed.

$\square$

Remark B.2.1. *Notice that we didn't use the assumption* (PDV) *for this part of the proof of Theorem B.1.13.*

B.2.3 Fourth implication of Theorem B.1.13

Definition B.2.2. *Say that a collection of ϵ-balls $(B_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ has the property* (NB) *if and only if, for all $p \geq 1$,*

$$m(\partial_\epsilon B_p) \leq \frac{1}{p} m(B_p) \tag{NB}$$

Proposition B.2.3. *Let (Γ, m, P) be a weighted graph satisfying* (PDV) *and $\epsilon \geq 0$. Let $(\bar{B}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ a collection of ϵ-balls such that, for all $n \geq 1$, the radius of $\bar{B}_n$ is equal to n. Then there exists a collection $(B_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ of ϵ-balls that satisfies:*

(i) For all $p \in \mathbb{N}^*$, there exists $n \in \mathbb{N}^*$ such that $B_p \subset \bar{B}_n$.

(ii) $(B_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ has the property (NB).

Proof: Define x_n as the center of the ϵ-ball $\bar{B}_n$. Assume that there exists $K > 0$ such that for all $n \in \mathbb{N}^*$ and all $l \in [\![1, n-1]\!]$,

$$m(\partial_\epsilon B_\epsilon(x_n, l)) \geq K m(B_\epsilon(x_n, l)) \tag{B.3}$$

Since we have the disjoint union

$$B_\epsilon(x_n, l+1) = \partial_\epsilon B_\epsilon(x_n, l) \cup B_\epsilon(x_n, l)$$

one has for all $n \in \mathbb{N}$ and all $l \in [\![0, n-2]\!]$,

$$m(B_\epsilon(x_n, l+1)) \geq (1+K) m(B_\epsilon(x_n, l)),$$

and thus by induction, one obtains for all $n \in \mathbb{N}^*$

$$m(\bar{B}_n) = m(B_\epsilon(x_n, n)) \geq (1+K)^{n-1} m(x_n).$$

Yet, assumption (PDV) yields, for all $n \in \mathbb{N}^*$,

$$m(B_n) \lesssim n^d m(x_n).$$

Hence, we obtain for all $n \in \mathbb{N}^*$

$$(1+K)^{n-1} \lesssim n^d,$$

which is impossible. This yields that (B.3) is false. That is, for all $p \in \mathbb{N}^*$, there exist $n_p \in \mathbb{N}^*$, $l_p \in [\![1, n_p - 1]\!]$ such that

$$m(\partial_\epsilon B_\epsilon(x_{n_p}, l_p)) \leq \frac{1}{p} m(B_\epsilon(x_{n_p}, l_p)).$$

The collection $(B_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ where $B_p = B_\epsilon(x_{n_p}, l_p) \subset \bar{B}_{n_p}$ satisfies (i) and (ii). □

Proof: [Theorem B.1.13, (iv) implies (i)].

Assume (iv). Let $\epsilon > 0$. Then there exists a collection of ϵ-balls $(\bar{B}^\epsilon_r)_{r\in\mathbb{N}^*}$ such that for all $r \in \mathbb{N}^*$, $\bar{B}^\epsilon_r$ is of radius r and $\bar{B}^\epsilon_r$ is $(2, \epsilon)$-pathed.
According to Proposition B.2.3, there exists then a collection $(B^\epsilon_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ of ϵ-balls that satisfies

1. $m(\partial_\epsilon B^\epsilon_p) \leq \frac{1}{p} m(B^\epsilon_p)$,
2. for all $p \in \mathbb{N}^*$, there exists $r_p \in \mathbb{N}^*$ such that $B^\epsilon_p \subset \bar{B}_{r_p}$. Hence, for all $p \in \mathbb{N}^*$, B^ϵ_p is $(2, \epsilon)$-pathed.

Fix now $\eta > 0$ and $q \in [1, +\infty)$. We want to prove that there exists a nonzero function f_η on Γ such that

$$\|(I+P) f_\eta\|^q_{L^q} \leq \eta \|f_\eta\|^q_{L^q}. \tag{B.4}$$

Let $p \in \mathbb{N}^*$ and $\epsilon \geq 0$ to be fixed later. Since B^ϵ_p is $(2, \epsilon)$-pathed, Proposition B.1.12 provides a partition (E_0, E_1) of B^ϵ_p. Define $f_\eta : \Gamma \to \mathbb{R}$ by

$$f_\eta(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \notin B^\epsilon_p \\ 1 & \text{if } x \in E_0 \\ -1 & \text{if } x \in E_1 \end{cases}$$

One has then

$$\begin{aligned}
\|(I+P)f_\eta\|_{L^q}^q &= \sum_{x\in\Gamma}\left|\sum_{y\in\Gamma}[f_\eta(x)+f_\eta(y)]p(x,y)m(y)\right|^q m(x)\\
&\leq \sum_{x\in\Gamma}\sum_{y\in\Gamma}|f_\eta(x)+f_\eta(y)|^q p(x,y)m(y)m(x)\\
&\leq \sum_{y\sim_\epsilon x}|f_\eta(x)+f_\eta(y)|^q p(x,y)m(y)m(x)+\sum_{y\not\sim_\epsilon x}|f_\eta(x)+f_\eta(y)|^q p(x,y)m(y)m(x).
\end{aligned}$$

Let us estimate the first term. Since $|f_\eta(x)+f_\eta(y)|=0$ when $x,y\in B_p^\epsilon$ or $x,y\in(B_p^\epsilon)^c$ (remember that, since $x\sim_\epsilon y$, either $x\in E_0$ and $y\in E_1$, or $x\in E_1$ and $y\in E_0$), we have

$$\begin{aligned}
&\sum_{y\sim_\epsilon x}|f_\eta(x)+f_\eta(y)|^q p(x,y)m(y)m(x)\\
&\leq \sum_{y\in\partial_\epsilon B_p^\epsilon}\sum_{x\in B_p^\epsilon}|f_\eta(x)+f_\eta(y)|^q p(x,y)m(y)m(x)+\sum_{x\in\partial_\epsilon B_p^\epsilon}\sum_{y\in B_p^\epsilon}|f_\eta(x)+f_\eta(y)|^q p(x,y)m(y)m(x)\\
&\quad = 2\sum_{y\in\partial_\epsilon B_p^\epsilon}\sum_{x\in B_p^\epsilon}|f_\eta(x)+f_\eta(y)|^q p(x,y)m(y)m(x)\\
&\leq 2\sum_{y\in\partial_\epsilon B_p^\epsilon}\sum_{x\in B_p^\epsilon}p(x,y)m(y)m(x)\\
&\leq 2\sum_{y\in\partial_\epsilon B_p^\epsilon}\left(\sum_{x\in\Gamma}p(x,y)m(x)\right)m(y)\\
&\quad = 2m(\partial_\epsilon B_p^\epsilon)\\
&\leq \frac{2}{p}m(B_p^\epsilon).
\end{aligned}$$

We turn now to the estimate of the second term

$$\begin{aligned}
&\sum_{y\not\sim_\epsilon x}|f_\eta(x)+f_\eta(y)|^q p(x,y)m(y)m(x)\\
&\leq \sum_{\substack{x\sim y\\ p(x,y)m(y)\leq\epsilon}}|f_\eta(x)+f_\eta(y)|^q p(x,y)m(y)m(x)+\sum_{\substack{x\sim y\\ p(x,y)m(x)\leq\epsilon}}|f_\eta(x)+f_\eta(y)|^q p(x,y)m(y)m(x)\\
&\leq \epsilon\sum_{x\sim y}|f_\eta(x)+f_\eta(y)|^q[m(x)+m(y)]\\
&\leq 2^q\epsilon\left(\sum_{x\in B_p^\epsilon}\sum_{x\sim y}[m(x)+m(y)]+\sum_{y\in B_p^\epsilon}\sum_{x\sim y}[m(x)+m(y)]\right)\\
&\quad = 2^{q+1}\epsilon\sum_{x\in B_p^\epsilon}\sum_{x\sim y}[m(x)+m(y)]\\
&\leq 2^{q+1}\epsilon\sum_{x\in B_p^\epsilon}[C_{dvl}+N_{dvl}]m(x)\\
&\leq 2^{q+1}\epsilon[C_{dvl}+N_{dvl}]m(B_p^\epsilon).
\end{aligned}$$

As a consequence, since $\|f\|_{L^q}^q=m(B_p^\epsilon)$, we obtain

$$\|(I+P)f_\eta\|_{L^q}^q\leq\left(\frac{2}{p}+2^{q+1}\epsilon[C_{dvl}+N_{dvl}]\right)\|f\|_{L^q}^q$$

We fix p big enough and ϵ small enough (both depend of η and q) such that $\frac{2}{p}+2^{q+1}\epsilon[C_{dvl}+N_{dvl}]\leq\eta$, which gives (B.4).
We conclude by noticing that (B.4) yields that $-1\in Sp_{L^q}(P)$. □

Appendix C

Hardy and BMO spaces on graphs, application to Riesz transform

C.1 Introduction and statement of the results

The study of real variable Hardy spaces in $\mathbb{R}^n$ began in the early 1960's with the paper of Stein and Weiss [SW60]. At the time, the spaces were defined by means of Riesz transforms and harmonic functions. Fefferman and Stein provided in [FS72] various characterizations (for instance in terms of suitable maximal functions) and developed real variable methods for the study of Hardy spaces.

In several issues in harmonic analysis, $H^1(\mathbb{R}^n)$ turns out to be the proper substitute of $L^1(\mathbb{R}^n)$. For example, the Riesz transforms, namely the operators $R_j = \partial_j(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}$, are $L^p(\mathbb{R}^n)$ bounded for all $p \in (1, +\infty)$, $H^1(\mathbb{R}^n)$-bounded, but not $L^1(\mathbb{R}^n)$-bounded (see [Mey90]).

Hardy spaces were defined in the more general context of spaces of homogeneous type by Coifman and Weiss in [CW77], by means of an atomic decomposition. An atom is defined as a function supported in a ball, with zero integral and suitable size condition. However, even in the Euclidean context, the definition of the Hardy space H^1 given by Coifman and Weiss is not always suited to the H^1-L^1 boundedness of some Calderòn-Zygmund type operators. Indeed, the cancellation condition satisfied by atoms does not always match with differential operators (consider the case of $-\operatorname{div}(A\nabla)$ on $\mathbb{R}^n$, for instance).

To overcome this difficulty, Hardy spaces adapted to operators were developed in various frameworks during the last decade. In 2005, in [DY05a] and [DY05b], Duong and Yan defined Hardy and BMO spaces for an operator L when the kernel of the semigroup generated by L satisfies a pointwise Gaussian upper bound. It was discovered later that, together with the doubling condition for the volumes of balls, L^2 Davies-Gaffney type estimates for the semigroup generated by L are enough to develop a quite rich theory of Hardy spaces on Riemannian manifolds (see [AMR08]) and for second order divergence form elliptic operator in $\mathbb{R}^n$ with measurable complex coefficients (see [HM09]). These ideas were pushed further in the general context of doubling measure spaces when L is self-adjoint (see [HLM$^+$11]).

The present work is devoted to an analogous theory of Hardy spaces in a discrete context, namely in graphs Γ equipped with a suitable discrete Laplace operator, given by $I-P$ where P is a Markov operator (see [Gri09] and the references therein). We define and give various characterizations of the Hardy space $H^1(\Gamma)$ adapted to P, under very weak assumptions on Γ. The first characterization is formulated in terms of quadratic functionals (of Lusin type), relying on results and methods developed in [BR09] and [Fen15b]. The second one is the molecular (or atomic) decomposition of $H^1(\Gamma)$. A description of the dual space of $H^1(\Gamma)$ as a BMO-type space is obtained.

We also deal with the Riesz transform on Γ, namely the operator $d(I-P)^{-\frac{1}{2}}$, where d stands for the differential on Γ (*i.e.* $df(x,y) := f(y) - f(x)$ for all functions f on Γ and all edges (x,y)). When $p \in (1, +\infty)$, the L^p-boundedness of the Riesz transform was dealt with in [BR09, Rus00]. Here, we prove an endpoint boundedness result for $p = 1$: roughly speaking, the Riesz transform is H^1-bounded. In the same spirit as [AMR08], this assertion requires the definition a Hardy space of "exact 1-forms" on the edges of Γ. We define and give characterizations of this space by quadratic functionals and molecular decompositions. Finally, the H^1-boundedness of the Riesz transform is established.

Some Hardy spaces associated with $I - P$ were introduced and characterized in [BD14], together with a description of their duals and the H^1-L^1 boundedness of Riesz transform was proved. Even if the authors in [BD14] also deal with the case of H^p for $p < 1$, their assumptions on P are stronger than ours (they assume a pointwise Gaussian upper bound on the iterates of the kernel of P, which is not required for most of our results) and they do not consider Hardy spaces of forms. Moreover, the Hardy spaces introduced in the present work are bigger than the ones in [BD14].

C.1.1 The discrete setting

Let Γ be an infinite set and $\mu_{xy} = \mu_{yx} \geq 0$ a symmetric weight on $\Gamma \times \Gamma$. The couple (Γ, μ) induces a (weighted unoriented) graph structure if we define the set of edges by

$$E = \{(x,y) \in \Gamma \times \Gamma,\ \mu_{xy} > 0\}.$$

We call then x and y neighbors (or $x \sim y$) if $(x,y) \in E$.
We will assume that the graph is connected and locally uniformly finite. A graph is connected if for all $x, y \in \Gamma$, there exists a path $x = x_0, x_1, \dots, x_N = y$ such that for all $1 \leq i \leq N$, $x_{i-1} \sim x_i$ (the length of such path is then N). A graph is said to be locally uniformly finite if there exists $M_0 \in \mathbb{N}$ such that for all $x \in \Gamma$, $\#\{y \in \Gamma,\ y \sim x\} \leq M_0$ (i.e. the number of neighbors of a vertex is uniformly bounded).
The graph is endowed with its natural metric d, which is the shortest length of a path joining two points. For all $x \in \Gamma$ and all $r > 0$, the ball of center x and radius r is defined as $B(x,r) = \{y \in \Gamma,\ d(x,y) < r\}$. In the opposite way, the radius of a ball B is the only integer r such that $B = B(x_B, r)$ (with x_B the center of B). Therefore, for all balls $B = B(x,r)$ and all $\lambda \geq 1$, we set $\lambda B := B(x, \lambda r)$ and define $C_j(B) = 2^{j+1}B \backslash 2^j B$ for all $j \geq 2$ and $C_1(B) = 4B$.
If $E, F \subset \Gamma$, $d(E,F)$ stands for the distance between E and F, namely

$$d(E,F) = \inf_{x \in E,\ y \in F} d(x,y).$$

We define the weight $m(x)$ of a vertex $x \in \Gamma$ by $m(x) = \sum_{x \sim y} \mu_{xy}$. More generally, the volume of a subset $E \subset \Gamma$ is defined as $m(E) := \sum_{x \in E} m(x)$. We use the notation $V(x,r)$ for the volume of the ball $B(x,r)$, and in the same way, $V(B)$ represents the volume of a ball B.
We define now the $L^p(\Gamma)$ spaces. For all $1 \leq p < +\infty$, we say that a function f on Γ belongs to $L^p(\Gamma, m)$ (or $L^p(\Gamma)$) if

$$\|f\|_p := \left(\sum_{x \in \Gamma} |f(x)|^p m(x) \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty,$$

while $L^\infty(\Gamma)$ is the space of functions satisfying

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in \Gamma} |f(x)| < +\infty.$$

Let us define for all $x, y \in \Gamma$ the discrete-time reversible Markov kernel p associated with the measure m by $p(x,y) = \frac{\mu_{xy}}{m(x)m(y)}$. The discrete kernel $p_l(x,y)$ is then defined recursively for all $l \geq 0$ by

$$\begin{cases} p_0(x,y) = \frac{\delta(x,y)}{m(y)} \\ p_{l+1}(x,y) = \sum_{z \in \Gamma} p(x,z) p_l(z,y) m(z). \end{cases} \tag{C.1}$$

Remark C.1.1. *Note that this definition of p_l differs from the one of p_l in [Rus00], [BR09] or [Del99], because of the $m(y)$ factor. However, p_l coincides with K_l in [Dun06]. Remark that in the case of the Cayley graphs of finitely generated discrete groups, where $m(x) = 1$ for all x, the definitions coincide.*

Notice that for all $l \geq 1$, we have

$$\|p_l(x,.)\|_{L^1(\Gamma)} = \sum_{y \in \Gamma} p_l(x,y) m(y) = \sum_{d(x,y) \leq l} p_l(x,y) m(y) = 1 \qquad \forall x \in \Gamma, \tag{C.2}$$

and that the kernel is symmetric:

$$p_l(x,y) = p_l(y,x) \qquad \forall x, y \in \Gamma. \tag{C.3}$$

For all functions f on Γ, we define P as the operator with kernel p, i.e.

$$Pf(x) = \sum_{y\in\Gamma} p(x,y)f(y)m(y) \qquad \forall x \in \Gamma. \tag{C.4}$$

It is easily checked that P^l is the operator with kernel p_l.

Since $p(x,y) \geq 0$ and (C.2) holds, one has, for all $p \in [1,+\infty]$,

$$\|P\|_{p\to p} \leq 1. \tag{C.5}$$

Remark C.1.2. *Let $1 \leq p < +\infty$. Since, for all $l \geq 0$, $\left\|P^l\right\|_{p\to p} \leq 1$, the operators $(I-P)^\beta$ and $(I+P)^\beta$ are L^p-bounded for all $\beta \geq 0$ (see [CSC90]).*

We define a nonnegative Laplacian on Γ by $\Delta = I - P$. One has then

Remark C.1.3. *One can check that $\|\Delta\|_{1\to 1} \leq 2$. Moreover, the previous remark states that Δ^β is $L^1(\Gamma)$-bounded. Note that the L^1-boundedness of the operators Δ^β is not true in the continuous setting (such as Riemannian manifolds), and makes some proofs of the present paper easier than in the case of Riemannian manifolds. In particular, we did not need then to prove similar results of the ones in [AMM].*

$$\begin{aligned} < (I-P)f, f >_{L^2(\Gamma)} &= \sum_{x,y\in\Gamma} p(x,y)(f(x)-f(y))f(x)m(x)m(y) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{x,y\in\Gamma} p(x,y)|f(x)-f(y)|^2 m(x)m(y), \end{aligned} \tag{C.6}$$

where we use (C.2) for the first equality and (C.3) for the second one. The last calculus proves that the following operator

$$\nabla f(x) = \left(\frac{1}{2}\sum_{y\in\Gamma} p(x,y)|f(y)-f(x)|^2 m(y)\right)^{\frac{1}{2}},$$

called “length of the gradient” (and the definition of which is taken from [CG98]), satisfies

$$\|\nabla f\|^2_{L^2(\Gamma)} =< (I-P)f, f >_{L^2(\Gamma)} = \|\Delta^{\frac{1}{2}} f\|_{L^2(\Gamma)}. \tag{C.7}$$

C.1.2 Assumptions on the graph

Definition C.1.4. *We say that (Γ,μ) satisfies the doubling property if there exists $C > 0$ such that*

$$V(x,2r) \leq CV(x,r) \qquad \forall x \in \Gamma, \forall r > 0. \tag{DV}$$

Proposition C.1.5. *Let (Γ,μ) satisfying the doubling property. Then there exists $d > 0$ such that*

$$V(x,\lambda r) \lesssim \lambda^d V(x,r) \qquad \forall x \in \Gamma,\ r > 0 \text{ and } \lambda \geq 1. \tag{C.8}$$

We denote by d_0 the infimum of the d satisfying (C.8).

Definition C.1.6. *We say that (Γ,μ) (or P) satisfies* (LB) *if there exists $\epsilon = \epsilon_{LB} > 0$ such that*

$$p(x,x)m(x) \geq \epsilon \qquad \forall x \in \Gamma. \tag{LB}$$

Remark C.1.7. *In particular, the condition* (LB) *implies that -1 does not belong to the L^2-spectrum of P, which implies in turn the analyticity of P in $L^p(\Gamma)$, $1 < p < +\infty$ ([CSC90]).*

From now on, all the graphs considered (unless explicitly stated) satisfy the doubling property and (LB). In this context, Coulhon, Grigor’yan and Zucca proved in [CGZ05] (Theorem 4.1) that the following Davies-Gaffney estimate holds:

Theorem C.1.8. *Assume that* (Γ, μ) *satisfies* (DV)*. Then there exist* $C, c > 0$ *such that for all subsets* $E, F \subset \Gamma$ *and all functions* f *supported in* F*, one has*

$$\|P^{l-1} f\|_{L^2(E)} \leq C \exp\left(-c\frac{d(E,F)^2}{l}\right) \|f\|_{L^2(F)} \qquad \forall l \in \mathbb{N}^*. \tag{GUE}$$

The estimate (GUE), also called Gaffney estimate, will be sufficient to prove most of the results of this paper. However, some results proven here can be improved if we assume the following stronger pointwise Gaussian estimate:

Definition C.1.9. *We say that* (Γ, μ) *satisfies* (UE) *if there exist* $C, c > 0$ *such that*

$$p_{l-1}(x,y) \leq C \frac{1}{V(x, \sqrt{l})} \exp\left(-c\frac{d(x,y)^2}{l}\right) \qquad \forall x, y \in \Gamma, \, \forall l \in \mathbb{N}^*. \tag{UE}$$

Remark C.1.10. *Under* (DV)*, property* (UE) *is equivalent to*

$$p_{l-1}(x,x) \leq \frac{C}{V(x, \sqrt{l})} \qquad \forall x \in \Gamma, \, \forall l \in \mathbb{N}^*. \tag{DUE}$$

The conjunction of (DV) *and* (UE) *(or* (DUE)*) is also equivalent to some relative Faber-Krahn inequality (see [CG98]).*

C.1.3 Definition of Hardy spaces on weighted graphs

We introduce three different definitions for Hardy spaces. The first two ones rely on molecular decomposition.

Definition C.1.11. *Let* $M \in \mathbb{N}^*$*. When* $\epsilon \in (0, +\infty)$*, a function* $a \in L^2(\Gamma)$ *is called a* (BZ_1, M, ϵ)*-molecule if there exist* $s \in \mathbb{N}^*$*, a* M*-tuple* $(s_1, \dots, s_M) \in [\![s, 2s]\!]^M$*, a ball* B *of radius* $\sqrt{s}$ *and a function* $b \in L^2(\Gamma)$ *such that*

(i) $a = (I - P^{s_1}) \dots (I - P^{s_M}) b$,

(ii) $\|b\|_{L^2(C_j(B))} \leq 2^{-j\epsilon} V(2^j B)^{-\frac{1}{2}}$, $\forall j \geq 1$.

A function $a \in L^2(\Gamma)$ *is called a* (BZ_1, M, ∞)*-molecule (or a* (BZ_1, M)*-atom) if there exist* $s \in \mathbb{N}^*$*, a* M*-tuple* $(s_1, \dots, s_M) \in [\![1, M]\!]^M$ *a ball* B *of radius* $\sqrt{s}$ *and a function* $b \in L^2(\Gamma)$ *supported in* B *such that*

(i) $a = (I - P^{s_1}) \dots (I - P^{s_M}) b$,

(ii) $\|b\|_{L^2} = \|b\|_{L^2(B)} \leq V(B)^{-\frac{1}{2}}$.

We say that a (BZ_1, M, ϵ)*-molecule* a *is associated with an integer* s*, a* M*-tuple* $(s_1, \dots, s_M)$ *and a ball* B *when we want to refer to* s*,* $(s_1, \dots, s_M)$ *and* B *given by the definition.*

The second kind of molecules we consider are defined via the operators $I - (I + s\Delta)^{-1}$:

Definition C.1.12. *Let* $M \in \mathbb{N}^*$*. When* $\epsilon \in (0, +\infty)$*, a function* $a \in L^2(\Gamma)$ *is called a* (BZ_2, M, ϵ)*-molecule if there exist* $s \in \mathbb{N}^*$*, a ball* B *of radius* $\sqrt{s}$ *and a function* $b \in L^2(\Gamma)$ *such that*

(i) $a = [I - (I + s\Delta)^{-1}]^M b$,

(ii) $\|b\|_{L^2(C_j(B))} \leq 2^{-j\epsilon} V(2^j B)^{-\frac{1}{2}}$, $\forall j \geq 1$.

A function $a \in L^2(\Gamma)$ *is called a* (BZ_2, M, ∞)*-molecule (or a* (BZ_2, M)*-atom) if there exist* $s \in \mathbb{N}^*$*, a ball* B *of radius* $\sqrt{s}$ *and a function* $b \in L^2(\Gamma)$ *supported in* B *such that*

(i) $a = [I - (I + s\Delta)^{-1}]^M b$,

(ii) $\|b\|_{L^2} = \|b\|_{L^2(B)} \leq V(B)^{-\frac{1}{2}}$.

We say that a (BZ_2, M, ϵ)*-molecule* a *is associated with an integer* s *and a ball* B *when we want to refer to* s *and* B *given by the definition.*

Remark C.1.13. 1. *When* b *is the function occurring in Definition C.1.11 or in Definition C.1.12, note that* $\|b\|_{L^2} \lesssim V(B)^{-\frac{1}{2}}$.

2. *As will be seen in Proposition C.2.7 below, when a is a molecule occurring in Definition C.1.11 or in Definition C.1.12, one has $\|a\|_{L^1} \lesssim 1$.*

Definition C.1.14. *Let $M \in \mathbb{N}^*$ and $\kappa \in \{1,2\}$. Let $\epsilon \in (0,+\infty]$.*
We say that f belongs to $H^1_{BZ\kappa,M,\epsilon}(\Gamma)$ if f admits a molecular (BZ_κ, M, ϵ)-representation, that is if there exist a sequence $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell^1$ and a sequence $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ of (BZ_κ, M, ϵ)-molecules such that

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i a_i \tag{C.9}$$

where the convergence of the series to f holds pointwise. The space is outfitted with the norm

$$\|f\|_{H^1_{BZ\kappa,M,\epsilon}} = \inf\left\{ \sum_{j=0}^{\infty} |\lambda_j|,\ \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j a_j,\ \text{is a molecular } (BZ_\kappa, M, \epsilon)\text{-representation of } f \right\}.$$

Proposition C.1.15. *Let $M \in \mathbb{N}^*$ and $\kappa \in \{1,2\}$. Then the space $H^1_{BZ\kappa,M,\epsilon}(\Gamma)$ is complete. Moreover, $H^1_{BZ\kappa,M,\epsilon}(\Gamma) \subset L^1(\Gamma)$.*

Proof: That $H^1_{BZ\kappa,M,\epsilon}(\Gamma) \subset L^1(\Gamma)$ follows at once from assertion 2 in Remark C.1.13, which shows that, if $f \in H^1_{BZ\kappa,M,\epsilon}(\Gamma)$, the series (C.9) converges in $L^1(\Gamma)$, and therefore converges to f in $L^1(\Gamma)$. Moreover, the space $H^1_{BZ\kappa,M,\epsilon}(\Gamma)$ is complete if it has the property

$$\sum_{j=0}^{\infty} \|f_j\|_{H^1_{BZ\kappa,M,\epsilon}} < +\infty \Longrightarrow \sum_{j=0}^{\infty} f_j \text{ converges in } H^1_{BZ\kappa,M,\epsilon}(\Gamma).$$

This fact is a straightforward consequence of the fact that $\|a\|_{L^1} \lesssim 1$ whenever a is a molecule (see Remark C.1.13 and Proposition C.2.7). See also the argument for the completeness of H^1_L in [HM09], p. 48. □

Remark C.1.16. *The BZ_κ molecules are molecules in the sense of Bernicot and Zhao in [BZ08] (and then BZ_κ are Hardy spaces in the sense of Bernicot and Zhao). Note that the definition of molecules is slightly different from the one given in [AMR08], [HM09] or [HLM+11]. The article [BZ08] provides some properties of the spaces $H^1_{BZ\kappa,M,\epsilon}$. In particular, under the assumption* (UE)*, these Hardy spaces are suited for L^p interpolation (see Remark C.1.41 below) .*

The third Hardy space is defined via quadratic functionals.

Definition C.1.17. *Define, for $\beta > 0$, the quadratic functionals L_β on $L^2(\Gamma)$ by*

$$L_\beta f(x) = \left(\sum_{(y,l)\in\gamma(x)} \frac{(l+1)^{2\beta-1}}{V(x,\sqrt{l+1})} |\Delta^\beta P^l f(y)|^2 m(y) \right)^{\frac{1}{2}}$$

where $\gamma(x) = \big\{(y,l) \in \Gamma\times\mathbb{N},\, d(x,y)^2 \leq l\big\}$.

Remark C.1.18. *One can also use instead of L_β the Lusin functional $\tilde{L}_\beta$ defined by*

$$\tilde{L}_\beta f(x) = \left(\sum_{(y,k)\in\tilde{\gamma}(x)} \frac{1}{(k+1)V(x,k+1)} |(k^2\Delta)^\beta P^{k^2} f(y) m(y)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

where $\tilde{\gamma}(x) = \{(y,k) \in \Gamma\times\mathbb{N},\, d(x,y) \leq k\}$.

The functionals L_β and $\tilde{L}_\beta$ are two different ways to discretize the "continuous Lusin functional defined by

$$\begin{aligned} L^c_\beta f(x) &= \left(\int_0^\infty \int_{d(y,x)^2<s} \frac{1}{sV(x,\sqrt{s})} |(s\Delta)^\beta e^{-s\Delta} f(y)|^2 d\mu(y)\, ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\int_0^\infty \int_{d(y,x)<t} \frac{1}{tV(x,t)} |(t^2\Delta)^\beta e^{-t^2\Delta} f(y)|^2 d\mu(y)\, dt \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Definition C.1.19. *The space* $E^1_{quad,\beta}(\Gamma)$ *is defined by*

$$E^1_{quad,\beta}(\Gamma) := \left\{ f \in L^2(\Gamma),\ \|L_\beta f\|_{L^1} < +\infty \right\}.$$

It is outfitted with the norm

$$\|f\|_{H^1_{quad,\beta}} := \|L_\beta f\|_{L^1}.$$

Remark C.1.20. *Notice that* $\|f\|_{H^1_{quad,\beta}}$ *is a norm because the null space of* Δ *is reduced to* $\{0\}$ *(because the set* Γ *is infinite by assumption). So, if* $k > \beta$ *is an integer and* $f \in L^2(\Gamma)$ *is such that* $\Delta^\beta f = 0$*, then* $\Delta^k f = \Delta^{k-\beta}\Delta^\beta f = 0$*, so that* $f = 0$*.*

Remark C.1.21. *Replacing* L_β *by* $\tilde{L}_\beta$ *in the definition of* $E^1_{quad,\beta}$ *yields an equivalent space* $\tilde{E}^1_{quad,\beta}$*, in the sense that the sets are equal and the norms are equivalent. The proof of this nontrivial fact can be done by adapting the proof of Theorem C.1.36 below (details are left to the reader).*

C.1.4 Definition of BMO spaces on weighted graphs

Fix $x_0 \in \Gamma$ and let $B_0 = B(x_0, 1) = \{x_0\}$. For $\epsilon > 0$ and $M \in \mathbb{N}$, for all functions $\phi \in L^2(\Gamma)$ which can be written as $\phi = \Delta^M \varphi$ for some function $\varphi \in L^2$, define

$$\|\phi\|_{\mathcal{M}_0^{M,\epsilon}} := \sup_{j\geq 1} \left[2^{j\epsilon} V(2^j B_0)^{\frac{1}{2}} \|\varphi\|_{L^2(C_j(B_0))} \right] \in [0, +\infty].$$

We set then

$$\mathcal{M}_0^{M,\epsilon} := \left\{ \phi = \Delta^M \varphi \in L^2(\Gamma),\ \|\phi\|_{\mathcal{M}_0^{M,\epsilon}} < +\infty \right\}.$$

Definition C.1.22. *For any* $M \in \mathbb{N}$*, we set,*

$$\mathcal{E}_M = \bigcup_{\epsilon>0} (\mathcal{M}_0^{M,\epsilon})^*$$

and

$$\mathcal{F}_M = \bigcap_{\epsilon>0} (\mathcal{M}_0^{M,\epsilon})^*.$$

Proposition C.1.23. *Let* $M \in \mathbb{N}$*,* $s \in \mathbb{N}^*$ *and* $(s_1, \dots, s_M) \in [\![s, 2s]\!]^M$*. If* $f \in \mathcal{E}_M$*, then the functions* $(I - P^{s_1}) \dots (I - P^{s_M}) f$ *and* $(I - (I + s\Delta)^{-1})^M f$ *can be defined in the sense of distributions and are included in* $L^2_{loc}(\Gamma)$*.*

Proof: The proof of this fact is done in Lemma C.3.2. □

Definition C.1.24. *Let* $M \in \mathbb{N}$*. Let* $f \in \mathcal{E}_M$*.*

We say then that f *belongs to* $BMO_{BZ1,M}(\Gamma)$ *if*

$$\|f\|_{BMO_{BZ1,M}} := \sup_{\substack{s\in\mathbb{N}^*,\\ (s_1,\dots,s_M)\in[\![s,2s]\!]^M,\\ B \text{ of radius } \sqrt{s}}} \left(\frac{1}{V(B)} \sum_{x\in B} |(I - P^{s_1}) \dots (I - P^{s_M}) f(x)|^2 m(x) \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty. \tag{C.10}$$

We say then that f *belongs to* $BMO_{BZ2,M}(\Gamma)$ *if*

$$\|f\|_{BMO_{BZ2,M}} := \sup_{\substack{s\in\mathbb{N}^*,\\ B \text{ of radius } \sqrt{s}}} \left(\frac{1}{V(B)} \sum_{x\in B} |[I - (I + s\Delta)^{-1}]^M f(x)|^2 m(x) \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty. \tag{C.11}$$

C.1.5 Definition of Hardy spaces of 1-forms

We define, for all $x \in \Gamma$, the set $T_x = \{(x,y) \in \Gamma^2,\ y \sim x\}$ and

$$T_\Gamma = \bigcup_{x \in \Gamma} T_x = \{(x,y) \in \Gamma^2,\ y \sim x\}.$$

Definition C.1.25. *If $x \in \Gamma$, we define, for all F_x defined on T_x the norm*

$$\|F_x\|_{T_x} = \left(\frac{1}{2} \sum_{y \sim x} p(x,y) m(y) |F_x(x,y)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Moreover, a function $F : T_\Gamma \to \mathbb{R}$ belongs to $L^p(T_\Gamma)$ if

(i) F is antisymmetric, that is $F(x,y) = -F(y,x)$ for all $x \sim y$,

(ii) $\|F\|_{L^p(T_\Gamma)} < +\infty$, with

$$\|F\|_{L^p(T_\Gamma)} = \| x \mapsto \|F(x,.)\|_{T_x} \|_{L^p(\Gamma)}.$$

Definition C.1.26. *Let $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ and $F : T_\Gamma \to \mathbb{R}$ be some functions. Define the operators d and d^* by*

$$df(x,y) := f(x) - f(y) \qquad \forall (x,y) \in T_\Gamma$$

and

$$d^* F(x) := \sum_{y \sim x} p(x,y) F(x,y) m(y) \qquad \forall x \in \Gamma.$$

Remark C.1.27. *It is plain to see that $d^* d = \Delta$ and $\|df(x,.)\|_{T_x} = \nabla f(x)$.*

The definition of Hardy spaces of 1-forms is then similar to the case of functions. First, we introduce Hardy spaces via molecules.

Definition C.1.28. *Let $M \in \mathbb{N}$ and $\epsilon \in (0,+\infty)$. A function $a \in L^2(T_\Gamma)$ is called a $(BZ_2, M+\frac{1}{2}, \epsilon)$-molecule if there exist $s \in \mathbb{N}^*$, a ball B of radius $\sqrt{s}$ and a function $b \in L^2(\Gamma)$ such that*

(i) $a = s^{M+\frac{1}{2}} d\Delta^M (I - s\Delta)^{-M-\frac{1}{2}} b$;

(ii) $\|b\|_{L^2(C_j(B))} \leq 2^{-j\epsilon} V(2^j B)^{-\frac{1}{2}}$ for all $j \geq 1$.

Remark C.1.29. *As in the case of functions, Corollary C.2.12 below implies a uniform bound on the L^1 norm of molecules, that is, for all $M \in \mathbb{N}$ and all $\epsilon \in (0,+\infty)$, there exists $C >$ such that each (BZ_2, M, ϵ)-molecule a satisfies*

$$\|a\|_{L^1(T_\Gamma)} \leq C.$$

Definition C.1.30. *Let $M \in \mathbb{N}$ and $\epsilon \in (0,+\infty)$. We say that F belongs to $H^1_{BZ2,M+\frac{1}{2},\epsilon}(T_\Gamma)$ if F admits a molecular $(BZ_2, M+\frac{1}{2}, \epsilon)$-representation, that is if there exist a sequence $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell^1$ and a sequence $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ of $(BZ_2, M+\frac{1}{2}, \epsilon)$-molecules such that*

$$F = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i a_i$$

where the sum converges pointwise on T_Γ . The space is outfitted with the norm

$$\|f\|_{H^1_{BZ2,M+\frac{1}{2},\epsilon}} = \inf \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} |\lambda_i|,\ \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i a_i \text{ is a molecular } (BZ_2, M+\frac{1}{2}, \epsilon)\text{-representation of } f \right\}.$$

Remark C.1.31. *The space $H^1_{BZ2,M+\frac{1}{2},\epsilon}(T_\Gamma)$ is complete. The argument is analogous to the one of Proposition C.1.15.*

In order to define the Hardy spaces of forms associated with operators, we introduce the L^2 adapted Hardy spaces $H^2(T_\Gamma)$ defined as the closure in $L^2(T_\Gamma)$ of

$$E^2(T_\Gamma) := \{F \in L^2(T_\Gamma),\, \exists f \in L^2(\Gamma) : \, F = df\}.$$

Notice that $d\Delta^{-1}d^* = Id_{E^2(T_\Gamma)}$. The functional $d\Delta^{-1}d^*$ can be extended to a bounded operator on $H^2(T_\Gamma)$ and

$$d\Delta^{-1}d^* = Id_{H^2(T_\Gamma)}. \tag{C.12}$$

Proposition C.1.32. *For all $p \in [1, +\infty]$, the operator d^* is bounded from $L^p(T_\Gamma)$ to $L^p(\Gamma)$. The operator $d\Delta^{-\frac{1}{2}}$ is an isometry from $L^2(\Gamma)$ to $L^2(T_\Gamma)$ (or $H^2(T_\Gamma)$), and the operator $\Delta^{-\frac{1}{2}}d^*$ is an isometry from $H^2(T_\Gamma)$ to $L^2(\Gamma)$.*

Proof: First, the L^p-boundedness of d^* is provided by

$$\begin{aligned}
\|d^*F\|^p_{L^p(\Gamma)} &= \sum_{x\in\Gamma} \left| \sum_{y\in\Gamma} p(x,y)m(y)F(x,y) \right|^p m(x) \\
&\lesssim \sum_{N^* x\in\Gamma} \|F(x,.)\|^p_{T_x} m(x) = \|F\|^p_{L^p(T_\Gamma)}.
\end{aligned}$$

The L^2-boundedness of $d\Delta^{-\frac{1}{2}}$ is obtained by the calculus

$$\begin{aligned}
\|d\Delta^{-\frac{1}{2}}f\|^2_{L^2(T_\Gamma)} &= \frac{1}{2}\sum_{x\sim y} p(x,y)|\Delta^{-\frac{1}{2}}f(x) - \Delta^{-\frac{1}{2}}f(y)|^2 m(x)m(y) \\
&= \|\nabla\Delta^{-\frac{1}{2}}f\|^2_{L^2(\Gamma)} = \|\Delta^{\frac{1}{2}}\Delta^{-\frac{1}{2}}f\|^2_{L^2(\Gamma)} \\
&= \|f\|^2_{L^2(\Gamma)}.
\end{aligned}$$

The L^2-boundedness of $\Delta^{-\frac{1}{2}}d^*$ is then a consequence of (C.12). Indeed, if $F \in H^2(\Gamma)$,

$$\begin{aligned}
\|\Delta^{-\frac{1}{2}}d^*F\|_{L^2(\Gamma)} &= \|d\Delta^{-\frac{1}{2}}\Delta^{-\frac{1}{2}}d^*F\|_{L^2(T_\Gamma)} \\
&= \|F\|_{L^2(T_\Gamma)}.
\end{aligned}$$

□

Definition C.1.33. *The space $E^1_{quad,\beta}(T_\Gamma)$ is defined by*

$$E^1_{quad,\beta}(T_\Gamma) := \left\{F \in H^2(T_\Gamma),\, \|L_\beta[\Delta^{-\frac{1}{2}}d^*F]\|_{L^1} < +\infty\right\}$$

equipped with the norm

$$\|F\|_{H^1_{quad,\beta}} := \|L_\beta[\Delta^{-\frac{1}{2}}d^*F]\|_{L^1}.$$

Note that, if $\|F\|_{H^1_{quad,\beta}} = 0$, one has $\Delta^{-1/2}d^*F = 0$, so that $d\Delta^{-1/2}\Delta^{-1/2}d^*F = 0$, which implies that $F = 0$ since $F \in H^2(T_\Gamma)$. Moreover, check that for all $F \in H^2(T_\Gamma)$, $\|F\|_{H^1_{quad,\beta}} = \|\Delta^{-\frac{1}{2}}d^*F\|_{H^1_{quad,\beta}}$

C.1.6 Main results

In the following results, Γ is assumed to satisfy (DV) and (LB).

Theorem C.1.34. *Let $M \in \mathbb{N}^*$. Then $BMO_{BZ1,M}(\Gamma) = BMO_{BZ2,M}(\Gamma)$.*

Theorem C.1.35. *Let $M \in \mathbb{N}^*$ and $\kappa \in \{1,2\}$. Let $\epsilon \in (0, +\infty]$.*

Then the dual space of $H^1_{BZ\kappa,\epsilon}(\Gamma)$ is $BMO_{BZ1,M}(\Gamma) = BMO_{BZ2,M}(\Gamma)$. In particular, the spaces $H^1_{BZ\kappa,M,\epsilon}(\Gamma)$ depend neither on ϵ nor on κ.

Moreover, $BMO_{BZ\kappa}(\Gamma)$, initially defined as a subspace of $\mathcal{E}_M$, is actually included in $\mathcal{F}_M$.

Theorem C.1.36. *Let $\beta > 0$ and $\kappa \in \{1, 2\}$. The completion $H^1_{quad,\beta}(\Gamma)$ of $E^1_{quad,\beta}(\Gamma)$ in $L^1(\Gamma)$ exists. Moreover, if $M \in (\frac{d_0}{4}, +\infty) \cap \mathbb{N}^*$ and $\epsilon \in (0, +\infty]$, then the spaces $H^1_{BZ1,M,\epsilon}(\Gamma)$, $H^1_{BZ2,M,\epsilon}(\Gamma)$ and $H^1_{quad,\beta}(\Gamma)$ coincide. More precisely, we have*

$$E^1_{quad,\beta}(\Gamma) = H^1_{BZ\kappa,M,\epsilon}(\Gamma) \cap L^2(\Gamma).$$

Once the equality $H^1_{BZ1,M,\epsilon}(\Gamma) = H^1_{BZ2,M,\epsilon}(\Gamma) = H^1_{quad,\beta}(\Gamma)$ is established, this space will be denoted by $H^1(\Gamma)$.

Corollary C.1.37. *Let $M_1, M_2 > \frac{d_0}{4}$. Then we have the equality*

$$BMO_{BZ1,M_1}(\Gamma) = BMO_{BZ2,M_2}(\Gamma).$$

Theorem C.1.38. *Let $\beta > 0$. The completion $H^1_{quad,\beta}(T_\Gamma)$ of $E^1_{quad,\beta}(T_\Gamma)$ in $L^1(T_\Gamma)$ exists.*

Moreover, if $M \in (\frac{d_0}{4} - \frac{1}{2}, +\infty) \cap \mathbb{N}$ and $\epsilon \in (0, +\infty)$, then the spaces $H^1_{BZ2,M+\frac{1}{2},\epsilon}(T_\Gamma)$ and $H^1_{quad,\beta}(T_\Gamma)$ coincide. More precisely, we have

$$E^1_{quad,\beta}(T_\Gamma) = H^1_{BZ2,M+\frac{1}{2},\epsilon}(T_\Gamma) \cap L^2(T_\Gamma).$$

Again, the space $H^1_{BZ2,M+\frac{1}{2},\epsilon}(T_\Gamma) = H^1_{quad,\beta}(T_\Gamma)$ will be denoted by $H^1(T_\Gamma)$.

Theorem C.1.39. *For this theorem only, assume furthermore that (Γ, μ) satisfies* (UE)*. Then M can be chosen arbitrarily in $\mathbb{N}^*$ in Theorem C.1.36 and Corollary C.1.37, M can be choose arbitrarily in $\mathbb{N}$ in Theorem C.1.38.*

Theorem C.1.40. *The Riesz transform $d\Delta^{-\frac{1}{2}}$ is bounded from $H^1(\Gamma)$ to $H^1(T_\Gamma)$. As a consequence the Riesz transform $\nabla\Delta^{-\frac{1}{2}}$ is bounded from $H^1(\Gamma)$ to $L^1(\Gamma)$.*

Proof: By definition,

$$\|d\Delta^{-\frac{1}{2}} f\|_{H^1(T_\Gamma)} \simeq \|d\Delta^{-\frac{1}{2}} f\|_{H^1_{quad,1}(T_\Gamma)} = \|\Delta^{-\frac{1}{2}} d^* d\Delta^{-\frac{1}{2}} f\|_{H^1_{quad,1}(\Gamma)} = \|f\|_{H^1_{quad,1}(\Gamma)} \simeq \|f\|_{H^1(\Gamma)}.$$

Therefore, $d\Delta^{-\frac{1}{2}}$ is H^1-bounded. Moreover,

$$\|\nabla\Delta^{-\frac{1}{2}} f\|_{L^1(\Gamma)} = \|d\Delta^{-\frac{1}{2}} f\|_{L^1(T_\Gamma)} \lesssim \|d\Delta^{-\frac{1}{2}} f\|_{H^1(T_\Gamma)}.$$

Indeed, the uniform L^1-bound of $(BZ2, M + \frac{1}{2}, \epsilon)$-molecules (see Corollary C.2.12) yields

$$H^1(T_\Gamma) = H^1_{BZ2,M+\frac{1}{2},\epsilon}(T_\Gamma) \hookrightarrow L^1(T_\Gamma)$$

for any $M > \frac{d_0}{4} - \frac{1}{2}$. □

Remark C.1.41.

(a) It is easily checked that under (UE)*, the Hardy space $H^1(\Gamma) = H^1_{BZ2,1,\infty}(\Gamma)$ satisfies the assumption of Theorem 5.3 in [BZ08]. As a consequence, the interpolation between $H^1(\Gamma)$ and $L^2(\Gamma)$ provides the spaces $L^p(\Gamma)$, $1 < p < 2$. Together with Theorem C.1.40, we can recover the main result of [Rus00], that is: under* (UE)*, the Riesz transform $\nabla\Delta^{-\frac{1}{2}}$ is L^p-bounded for all $p \in (1, 2]$.*

(b) An interesting byproduct of Theorem C.1.36 is the equality, for any $\epsilon \in (0, +\infty]$ and any $M > \frac{d_0}{4}$, between the spaces $H^1_{BZ\kappa,M,\epsilon}(\Gamma) \cap L^2(\Gamma)$ and $E^1_{BZ\kappa,M,\epsilon}(\Gamma)$ defined by

$$E^1_{BZ\kappa,M,\epsilon}(\Gamma) := \left\{ f \in L^2(\Gamma),\ \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j a_j \text{ is a molecular } (BZ_\kappa, M, \epsilon)\text{-representation of } f \right.$$
$$\left. \text{and the series converges in } L^2(\Gamma) \right\}$$

and outfitted with the norm

$$\|f\|_{E^1_{BZ\kappa,M,\epsilon}} = \inf \left\{ \sum_{i\in\mathbb{N}} |\lambda_i|,\ \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j a_j \textit{ is a mol. } (BZ_\kappa, M, \epsilon)\textit{-repr. of } f \right.$$
$$\left. \textit{and the series converges in } L^2(\Gamma) \right\}.$$

We have similar byproducts of Theorems C.1.38 and C.1.39. Precise statements and proofs are done in Corollary C.4.13.

As a consequence, the completion of $E^1_{BZ\kappa,M,\epsilon}(\Gamma)$ in $L^1(\Gamma)$ exists and is equal to $H^1_{BZ\kappa,M,\epsilon}$. On Riemannian manifolds or in more general contexts, the proof of this fact is much more complicated and is the main result of [AMM]. Let us emphasize that the proofs of our main results does not go through the $E^1_{BZ\kappa,M,\epsilon}$ spaces.

(c) *We may replace (i) in the definition of (BZ_2, M, ϵ)-molecules by*
(i') $a = (I - (I + s_1\Delta)^{-1}) \dots ((I - (I + s_M\Delta)^{-1})b$, where $(s_1, \dots, s_M) \in [s, 2s]^M$
or
(i") $a = (I - (I + r^2\Delta)^{-1})^M b$, where r is the radius of the ball B (or the smallest integer greater than $\sqrt{s}$)
and still get the same space $H^1_{BZ2,M,\epsilon}(\Gamma)$.

(d) *However, when $M \geq 3$, it is unclear whether replacing (i) of the definition of (BZ_1, M, ϵ)-molecules by*
(i') $a = (I - P^s)^M$
yields the same space $H^1_{BZ1,M,\epsilon}(\Gamma)$.

Section 2 is devoted to the proof of auxiliary results that will be useful for the next sections. The proof of Theorem C.1.34 is treated in paragraph 3.2 and the proof of Theorem C.1.35 is done in paragraph 3.3. In the last section, we establish Theorems C.1.36, C.1.38 and C.1.39.

C.1.7 Comparison with other papers

- **Comparison with [AMR08]**: In [AMR08], the authors proved analogous results (that is the H^1 boundedness of the Riesz transform under very weak assumptions and the various characterizations of H^1) on Riemannian manifolds. Some differences between the two papers can be noted. First, BMO spaces are not considered there. They also choose to define some Hardy spaces via tent spaces (while we prefer to use Lusin functionals). Contrary to us, they introduced the spaces H^p, for all $p \in [1, +\infty]$, and proved that these spaces form an interpolation scale for the complex method.
- **Comparison with [HLM$^+$11]**: This article develops Hardy and BMO spaces adapted to a symmetric operator L in a general context of doubling measure spaces when the semigroup generated by L satisfies L^2 Gaffney estimates. However, on graphs, it is unclear whether these L^2 Gaffney estimates for the semigroup generated by the Laplacian hold or not. Yet, Coulhon, Grigor'yan and Zucca proved in [CGZ05] that we have L^2 Gaffney type estimates for the discrete iterates of Markov operators and we only rely on these estimates in the present paper.
- **Comparison with [BD14]**: First of all, as in [HLM$^+$11], there are no results about Hardy spaces on 1-forms and the authors do not prove the H^1 boundedness of the Riesz transforms. Then, as said in the introduction, they assume in all their paper a pointwise Gaussian bound of the Markov kernel while it is not required for most of our results. Moreover, the results of the present paper stated under (UE) are stronger that those stated in [BD14]. Indeed, in the results stated in [BD14], the constant M need to be greater than $\frac{d_0}{2}$ while, in the present paper, we used the pointwise Gaussian bound in order to get rid of the dependence of M on the "dimension" d_0. Besides, the definitions of their Hardy spaces and ours *a priori* differ. Let us begin with the Hardy spaces defined via molecules. For convenience, we introduce a new definition of molecules.
  Definition C.1.42. *Let $M \in \mathbb{N}^*$ and $\epsilon \in (0, +\infty)$. A function $a \in L^2(\Gamma)$ is called a (HM, M, ϵ)-molecule if there exist a ball B of radius $r \in \mathbb{N}^*$ and a function $b \in L^2(\Gamma)$ such that*

(i) $a = [r^2\Delta]^M b$,

(ii) $\|[r^2\Delta]^k b\|_{L^2(C_j(B))} \leq 2^{-j\epsilon} V(2^j B)^{-\frac{1}{2}}$, $\forall j \in \mathbb{N}^*$, $\forall k \in [\![0, M]\!]$.

The space $H^1_{HM,M,\epsilon}(\Gamma)$ *is then defined in the same way as* $H^1_{BZ\kappa,M,\epsilon}(\Gamma)$.

Using methods developed in [HLM+11] and in the present paper, it can be proved that, if $M > \frac{d_0}{4}$ (or if $M \in \mathbb{N}^*$ if we assume the extra condition (UE)), there is equality between the spaces $H^1_{HM,M,\epsilon}(\Gamma)$ and $H^1_{quad,1}(\Gamma) = H^1(\Gamma)$. The proofs are similar to those of the present paper. The molecules introduced by Bui and Duong - we call them (BD, M, ϵ)-molecules - are the (HM, M, ϵ)-molecules where we replaced r^2 by r in (i) and (ii). It is easily checked that a (BD, M, ϵ)-molecule is a (HM, M, ϵ)-molecule and hence, under assumption (UE), our Hardy spaces are bigger than theirs.

Since they proved (as we do here) that Hardy spaces defined with molecules and with quadratic functionals coincide, the Hardy spaces via quadratic functionals in [BD14] are also different from ours. Indeed, our Hardy spaces are of parabolic type (heat kernel) while those of [BD14] are modeled on the Poisson semigroup. Furthermore, they only consider one Lusin functional, while we consider a family of Lusin functionals (indexed by $\beta > 0$), and the independence of Hardy spaces $H^1_{quad,\beta}(\Gamma)$ with respect to β is a key point of the proof of the boundedness of Riesz transforms.

Acknowledgements: the author is grateful to E. Russ for comments and suggestions that improved the paper. He would also like to thank P. Auscher and A. Morris for interesting discussions.

C.2 Preliminary results

C.2.1 L^2-convergence

Proposition C.2.1. *Let* $\beta > 0$. *Let* P *satisfying* (LB). *One has the following convergence: for all* $f \in L^2(\Gamma)$,

$$\sum_{k=0}^{N} a_k (I-P)^\beta P^k f \xrightarrow{N \to +\infty} f \qquad \text{in } L^2(\Gamma)$$

where $\sum a_k z^k$ *is the Taylor series of the function* $(1-z)^{-\beta}$.

Remark C.2.2. *This result extends Lemma 1.13 in [BR09]. It provides a discrete version of the identity*

$$f = c_\beta \int_0^\infty (t\Delta)^\beta e^{-t\Delta} f dt.$$

Corollary C.2.3. *Let* (Γ, μ) *a weighted graph. One has the following convergence: for all* $f \in L^2(\Gamma)$,

$$\sum_{k=0}^{N} a_k (I-P^2)^\beta P^{2k} f \xrightarrow{N \to +\infty} f \qquad \text{in } L^2(\Gamma)$$

Proof: (Proposition C.2.1)

First, notice that Corollary C.2.3 is an immediate consequence of Proposition C.2.1 since P^2 is a Markov operator satisfying (LB) (see [CGZ05]).

Let $f \in L^2(\Gamma)$. Let us check the behavior of

$$\left\| \left[\sum_{k=0}^{N} a_k (I-P)^\beta P^k - I \right] f \right\|_{L^2} \tag{C.13}$$

when $N \to +\infty$. Since $\|P\|_{2\to 2} = 1$ and P satisfies (LB), there exists $a > -1$ such that

$$P = \int_a^1 \lambda dE(\lambda).$$

Thus

$$\left\| \left[\sum_{k=0}^{N} a_k (I-P)^\beta P^k - I \right] f \right\|_{L^2}^2 = \int_a^1 \left[\sum_{k=0}^{N} a_k (1-\lambda)^\beta \lambda^k - 1 \right]^2 dE_{ff}(\lambda). \tag{C.14}$$

However,

$$\sum_{k=0}^{N} a_k(1-\lambda)^\beta \lambda^k \xrightarrow{N\to\infty} \begin{cases} 1 & \text{for all } \lambda \in [a,1) \\ 0 & \text{if } \lambda = 1 \end{cases}$$

and since the sum is nonnegative and increasing in N, then

$$\left|\sum_{k=0}^{N} a_k(1-\lambda)^\beta \lambda^k - 1\right| \leq 1 \qquad \forall \lambda \in [a,1].$$

We use this result in (C.14) to get the uniform bound

$$\left\| \left[\sum_{k=0}^{N} a_k(I-P)^\beta P^k - I\right] f \right\|_{L^2}^2 \leq \int_a^1 dE_{ff}(\lambda) = \|f\|_{L^2}^2. \tag{C.15}$$

Let us focus on (C.13) when we furthermore assume that $f \in \mathcal{R}(\Delta)$, that is $f = \Delta g$ for some $g \in L^2(\Gamma)$. The identity (C.14) reads as

$$\left\| \left[\sum_{k=0}^{N} a_k(I-P)^\beta P^k - I\right] f \right\|_{L^2}^2 = \int_a^1 \left[\sum_{k=0}^{N} a_k(1-\lambda)^{\beta+1} \lambda^k - (1-\lambda)\right]^2 dE_{gg}(\lambda).$$

Yet, $\sum_{k=0}^{N} a_k(1-\lambda)^{\beta+1}\lambda^k - (1-\lambda)$ converges uniformly to 0 for all $\lambda \in [a,1]$.

Consequently, for all $\epsilon > 0$, there exists N_0 such that, for all $N > N_0$,

$$\left\| \left[\sum_{k=0}^{N} a_k(I-P)^\beta P^k - I\right] f \right\|_{L^2}^2 \leq \epsilon \int_a^1 dE_{gg}(\lambda) = \epsilon \|g\|_{L^2}^2.$$

This implies

$$\sum_{k=0}^{N} a_k(I-P)^\beta P^k f \xrightarrow{N\to\infty} f \quad \text{ in } L^2 \text{ and for all } f \in \mathcal{R}(\Delta). \tag{C.16}$$

Since $L^2 = \overline{\mathcal{R}(\Delta)}$, the combination of (C.15) and (C.16) provides the desired conclusion. Indeed, (C.16) provides the L^2-convergence on the dense space $\mathcal{R}(\Delta)$ and the uniform boundedness (C.16) allows us to extend the convergence to $L^2(\Gamma)$. □

C.2.2 Davies-Gaffney estimates

Definition C.2.4. *We say that a family of operators $(A_s)_{s\in\mathbb{N}}$ satisfies Davies-Gaffney estimates if there exist three constants $C, c, \eta > 0$ such that for all subsets $E, F \subset \Gamma$ and all functions f supported in F, there holds*

$$\|A_s f\|_{L^2(E)} \leq C \exp\left(-c\left[\frac{d(E,F)^2}{s}\right]^\eta\right) \|f\|_{L^2}. \tag{C.17}$$

Hofmann and Martell proved in [HM03, Lemma 2.3] the following result about Davies-Gaffney estimates:

Proposition C.2.5. *If A_s and B_t satisfy Davies-Gaffney estimates, then there exist $C, c, \eta > 0$ such that for all subsets $E, F \subset \Gamma$ and all functions f supported in F, there holds*

$$\|A_s B_t f\|_{L^2(E)} \leq C \exp\left(-c\left[\frac{d(E,F)^2}{s+t}\right]^\eta\right) \|f\|_{L^2} \tag{C.18}$$

In particular, $(A_s B_s)_{s\in\mathbb{N}}$ satisfies Davies-Gaffney estimates.

More precisely, if η_A and η_B are the constants involved in (C.17) *respectively for A_s and B_t , then the constant η that occurs in* (C.18) *can be chosen equal to* $\min\{\eta_A, \eta_B\}$.

Proposition C.2.6. *Let $M \in \mathbb{N}$. The following families of operators satisfy the Davies-Gaffney estimates* *(i)* $\displaystyle\prod_{i=1}^{M}\left(\frac{1}{t_s^i}\sum_{k=0}^{t_s^i}P^k\right)$, *where for all* $i\in[\![1,M]\!]$, $t_s^i\in[\![1,2s]\!]$,

(ii) $\displaystyle\prod_{i=1}^{M}(I-P^{t_s^i})$, *where for all* $i\in[\![1,M]\!]$, $t_s^i\in[\![s,2s]\!]$,

(iii) $(s\Delta)^M P^s$,

(iv) $(I+s\Delta)^{-M}$,

(v) $(I-(I+s\Delta)^{-1})^M=(s\Delta)^M(I+s\Delta)^{-M}$.

In (i), (ii) and (iii), the parameter η is equal to 1 and in (iv) and (v), η is equal to $\frac{1}{2}$.

Proof: (i) and (ii) are direct consequences of (GUE) and Proposition C.2.5. Assertion (iii) is the consequence of (GUE) and (LB) and a proof can be found in [Dun06].

We turn now to the proof of (iv) and (v). According to Proposition C.2.5, it remains to show the Davies-Gaffney estimates for $(I+s\Delta)^{-1}$, and since $s\Delta(I+s\Delta)^{-1}=I-(I+s\Delta)^{-1}$, it is enough to deal with $(I+s\Delta)^{-1}$. The L^2-functional calculus provides the identity

$$\begin{aligned}(I+s\Delta)^{-1}f&=\frac{1}{1+s}\left(I-\frac{s}{1+s}P\right)^{-1}f\\&=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{1+s}\left(\frac{s}{1+s}\right)^kP^kf,\end{aligned}\tag{C.19}$$

where the convergence holds in $L^2(\Gamma)$.

Let f be a function supported in F. Then, one has with the Gaffney-Davies estimates (GUE):

$$\begin{aligned}\|(I+s\Delta)^{-1}f\|_{L^2(E)}&\lesssim\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{1+s}\left(\frac{s}{1+s}\right)^k\|P^kf\|_{L^2(E)}\\&\lesssim\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{1+s}\left(\frac{s}{1+s}\right)^k\exp\left(-c\frac{d(E,F)^2}{1+k}\right)\|f\|_{L^2(F)}\\&\lesssim\|f\|_{L^2(F)}\left[\sum_{k=0}^{s}\frac{1}{1+s}\exp\left(-c\frac{d(E,F)^2}{1+k}-c'\frac{k}{1+s}\right)\right.\\&\qquad\left.+\sum_{k=s}^{+\infty}\frac{1+s}{(1+k)^2}\exp\left(-c\frac{d(E,F)^2}{1+k}-c'\frac{k}{1+s}\right)\right].\end{aligned}$$

Yet, the function $\psi:k\in\mathbb{R}^+\mapsto c\frac{d(E,F)^2}{1+k}+c'\frac{k}{1+s}$ is bounded from below and

$$\psi(k)\gtrsim\frac{d(E,F)}{\sqrt{1+s}}.$$

Hence, the use of Lemma C.6.1 proved in the appendix yields

$$\begin{aligned}\|(I+s\Delta)^{-1}f\|_{L^2(E)}&\lesssim\|f\|_{L^2(F)}\exp\left(-c\frac{d(E,F)}{\sqrt{1+s}}\right)\left[\sum_{k=0}^{s}\frac{1}{1+s}+\sum_{k=s}^{+\infty}\frac{1+s}{(1+k)^2}\right]\\&\lesssim\|f\|_{L^2(F)}\exp\left(-c\frac{d(E,F)}{\sqrt{1+s}}\right).\end{aligned}$$

□

Proposition C.2.7. *Let $\kappa\in\{1,2\}$. Let a be a (BZ_κ,M,ϵ)-molecule. Then*

$$\|a\|_{L^1}\lesssim 1\qquad\textit{and}\qquad\|a\|_{L^2(C_j(B))}\lesssim\frac{2^{-j\epsilon}}{V(2^jB)^{\frac{1}{2}}}\quad\forall j\in\mathbb{N}^*.$$

Proof: We will only prove the case where $\kappa = 1$. The case $\kappa = 2$ is proven similarly and will therefore be skipped.

Since

$$\|a\|_{L^1} \leq \sum_{j\geq 1} V(2^{j+1}B)^{\frac{1}{2}} \|a\|_{L^2(C_j(B))},$$

we only need to check the second fact. Let $s \in \mathbb{N}$, $(s_1, \dots, s_M) \in [\![s, 2s]\!]^M$ and a ball B associated with the molecule a.

Define $\tilde{C}_j(B) = \bigcup_{k=j-1}^{j+1} C_k(B)$ and observe that $d(C_j(B), \Gamma \backslash \tilde{C}_j(B)) \gtrsim 2^j \sqrt{s}$. Then Proposition C.2.6 provides

$$\begin{aligned}
\|a\|_{L^2(C_j(B))} &\leq \|(I - P^{s_1}) \dots (I - P^{s_M})[b\mathbb{1}_{\tilde{C}_j(B)}]\|_{L^2(C_j(B))} \\
&\quad + \|(I - P^{s_1}) \dots (I - P^{s_M})[b\mathbb{1}_{\Gamma\backslash\tilde{C}_j(B)}]\|_{L^2(C_j(B))} \\
&\lesssim \|b\|_{L^2(\tilde{C}_j(B))} + e^{-c4^j} \|b\|_{L^2} \\
&\lesssim \frac{2^{-j\epsilon}}{V(2^j B)^{\frac{1}{2}}} + \frac{e^{-c4^j}}{V(B)^{\frac{1}{2}}} \\
&\lesssim \frac{2^{-j\epsilon}}{V(2^j B)^{\frac{1}{2}}}.
\end{aligned}$$

□

C.2.3 Gaffney estimates for the gradient

Proposition C.2.8. *Let* (Γ, μ) *satisfying* (LB) *(note that* (DV) *is not assumed here). Let* $c > 0$ *such that*

$$\frac{8ce^{8c}}{\epsilon_{LB}} \leq 1. \tag{C.20}$$

There exists $C > 0$ *such that for all subsets* $F \subset \Gamma$ *and all* f *supported in* F*, one has*

$$\left\| P^k f e^{c\frac{d^2(.,F)}{k+1}} \right\|_{L^2} \leq C\|f\|_{L^2}.$$

The proof of Proposition C.2.8 is based on the following result of Coulhon, Grigor'yan and Zucca:

Lemma C.2.9. *Let* (Γ, μ) *satisfying* (LB)*. Let* $(k, x) \mapsto g_k(x)$ *be a positive function on* $\mathbb{N} \times \Gamma$*. Then, for all finitely supported functions* $f \in L^2(\Gamma)$ *and for all* $k \in \mathbb{N}$*,*

$$\left\|\sqrt{g_{k+1}} P^{k+1} f\right\|_{L^2}^2 - \left\|\sqrt{g_k} P^k f\right\|_{L^2}^2 \leq \sum_{x\in\Gamma} |P^k f(x)|^2 \left(g_{k+1}(x) - g_k(x) + \frac{|\nabla g_{k+1}(x)|^2}{4\epsilon_{LB} g_{k+1}(x)} \right) m(x)$$

Proof: This fact is actually established in the proof of [CGZ05, Theorem 2.2, pp. 566-567]. □

Proof: (Proposition C.2.8).

First, let us prove the result for f supported in a finite set $F \subset \Gamma$. Let f (finitely supported and) supported in F. We wish to use Lemma C.2.9 with

$$g_k(x) = e^{2c\frac{d^2(x,F)}{k+1}}.$$

Check that, with Taylor-Lagrange inequality

$$\begin{aligned}
g_{k+1}(x) - g_k(x) &\leq \max_{t\in[k,k+1]} \left\{ -\frac{2cd^2(x,F)}{(t+1)^2} e^{2c\frac{d^2(x,F)}{t+1}} \right\} \\
&= -2c \left(\frac{d(x,F)}{k+2} \right)^2 g_{k+1}(x).
\end{aligned}$$

In the same way, one has

$$\nabla g_{k+1}(x) \leq \frac{4c[d(x,F)+1]}{k+2} e^{2c\frac{[d(x,F)+1]^2}{k+2}}.$$

Since f is supported in F, then $P^k f$ is supported in $\{x \in \Gamma,\, d(x,F) \leq k\}$. As a consequence, we can assume in the previous calculus that $d(x,F) \leq k$ and thus

$$\frac{[d(x,F)+1]^2}{k+2} \leq \frac{d^2(x,F)}{k+2} + 2.$$

Then

$$\frac{|\nabla g_{k+1}(x)|^2}{4\epsilon_{LB} g_{k+1}(x)} \leq \left(\frac{[d(x,F)+1]}{k+2}\right)^2 \frac{4c^2 e^{8c}}{\epsilon_{LB}} g_{k+1}(x).$$

First case: $d(x,F) \geq 1$, then

$$\frac{|\nabla g_{k+1}(x)|^2}{4\epsilon_{LB} g_{k+1}(x)} \leq \left(\frac{d(x,F)}{k+2}\right)^2 \frac{16c^2 e^{8c}}{\epsilon_{LB}} g_{k+1}(x)$$

and by (C.20),

$$g_{k+1}(x) - g_k(x) + \frac{|\nabla g_{k+1}(x)|^2}{4\epsilon_{LB} g_{k+1}(x)} \leq 0.$$

Second case, $d(x,F) = 0$, then

$$g_{k+1}(x) - g_k(x) + \frac{|\nabla g_{k+1}(x)|^2}{4\epsilon_{LB} g_{k+1}(x)} \leq \frac{1}{(k+2)^2} \frac{16c^2 e^{8c}}{\epsilon_{LB}^2} \leq \frac{2c}{(k+2)^2}$$

In all cases, one has then $P^k f(x) = 0$ or

$$g_{k+1}(x) - g_k(x) + \frac{|\nabla g_{k+1}(x)|^2}{4\epsilon_{LB} g_{k+1}(x)} \leq \frac{2c}{(k+2)^2}.$$

Lemma C.2.9 yields

$$\left\| P^{k+1} f e^{c\frac{d^2(.,F)}{k+2}} \right\|_{L^2}^2 - \left\| P^k f e^{c\frac{d^2(.,F)}{k+1}} \right\|_{L^2}^2 \leq \frac{2c}{(k+2)^2} \|P^k f\|_{L^2}^2,$$

and hence, by induction,

$$\left\| P^k f e^{c\frac{d^2(.,F)}{k+1}} \right\|_{L^2}^2 \leq \|f\|_{L^2}^2 + \sum_{l=0}^{k-1} \frac{2c}{(l+2)^2} \|P^l f\|_{L^2}^2 \lesssim \|f\|_{L^2}^2.$$

Consider now a general $f \in L^2(\Gamma)$. Without loss of generality, we can assume that f is nonnegative. Let $(\Gamma_i)_{i\in\mathbb{N}}$ an increasing sequence of finite subsets of Γ such that $\bigcup_{i=0}^{\infty} \Gamma_i = \Gamma$. Let $f_i = f \mathbb{1}_{\Gamma_i}$. One has then for any $x \in \Gamma$ and $k \in \mathbb{N}$,

$$f_i \uparrow f \qquad \text{and } P^k f_i \uparrow P^k f.$$

By the monotone convergence theorem, we obtain,

$$\left\| P^k f_i e^{c\frac{d^2(.,F)}{k+1}} \right\|_{L^2}^2 \uparrow \left\| P^k f e^{c\frac{d^2(.,F)}{k+1}} \right\|_{L^2}^2$$

so that

$$\begin{aligned} \left\| P^k f e^{c\frac{d^2(.,F)}{k+1}} \right\|_{L^2}^2 &= \lim_{i\to\infty} \left\| P^k f_i e^{c\frac{d^2(.,F)}{k+1}} \right\|_{L^2}^2 \\ &\lesssim \sup_{i\in\mathbb{N}} \|f_i\|_{L^2}^2 \\ &= \|f\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

□

Proposition C.2.10. *Let* (Γ,μ) *satisfying* (LB) *(note that* (DV) *is not assumed here). Let* $c>0$ *as in Proposition C.2.8. There exists* $C>0$ *such that for all subsets* $F \subset \Gamma$ *and all functions* f *supported in* F*, one has*

$$\left\| \nabla P^k f e^{\frac{c}{2}\frac{d^2(.,F)}{k+1}} \right\|_{L^2} \leq C \frac{\|f\|_{L^2}}{\sqrt{k+1}}.$$

Proof: The proof of this proposition is very similar to the one of Lemma 7 in [Rus00]. We define

$$I = I_k(f) := \left\| \nabla P^k f e^{\frac{c}{2}\frac{d^2(.,F)}{k+1}} \right\|_{L^2}^2.$$

One has then

$$\begin{aligned}
I &= \sum_{x,y\in\Gamma} p(x,y)|P^k(x) - P^k(y)|^2 e^{c\frac{d^2(x,F)}{k+1}} m(x)m(y) \\
&= \sum_{x,y\in\Gamma} p(x,y)[P^k f(x) - P^k f(y)] P^k f(x) e^{c\frac{d^2(x,F)}{k+1}} m(x)m(y) \\
&\quad - \sum_{x,y\in\Gamma} p(x,y)[P^k f(x) - P^k f(y)] P^k f(y) e^{c\frac{d^2(x,F)}{k+1}} m(x)m(y) \\
&= 2\sum_{x,y\in\Gamma} p(x,y)[P^k f(x) - P^k f(y)] P^k f(x) e^{c\frac{d^2(x,F)}{k+1}} m(x)m(y) \\
&\quad + \sum_{x,y\in\Gamma} p(x,y)[P^k f(x) - P^k f(y)] P^k f(x) \left[e^{c\frac{d^2(y,F)}{k+1}} - e^{c\frac{d^2(x,F)}{k+1}} \right] m(x)m(y) \\
&:= 2I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

We first estimate I_1. One has

$$\begin{aligned}
I_1 &= \sum_{x\in\Gamma} P^k f(x) e^{c\frac{d^2(x,F)}{k+1}} m(x) \sum_{y\in\Gamma} p(x,y)[P^k f(x) - P^k f(y)] m(y) \\
&= \sum_{x\in\Gamma} (I-P)P^k f(x) P^k f(x) e^{c\frac{d^2(x,F)}{k+1}} m(x).
\end{aligned}$$

Consequently, with the analyticity of P and Proposition C.2.8, we get

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq \|(I-P)P^k f\|_{L^2} \left\| P^k f e^{c\frac{d^2(.,F)}{k+1}} \right\|_{L^2} \\
&\lesssim \frac{1}{k+1} \|f\|_{L^2}^2.
\end{aligned} \tag{C.21}$$

We now turn to the estimate of I_2. One has, since $d(x,y) \leq 1$ (otherwise $p(x,y) = 0$),

$$\begin{aligned}
\left| e^{c\frac{d^2(y,F)}{k+1}} - e^{c\frac{d^2(x,F)}{k+1}} \right| &\leq 2\frac{[d(x,F)+1]}{k+1} e^{c\frac{d^2(x,F)}{k+1}} \\
&\lesssim \frac{1}{\sqrt{k+1}} e^{\frac{3c}{2}\frac{d^2(x,F)}{k+1}}.
\end{aligned}$$

Since f is supported in F, $P^k f$ is supported in $\{x \in \Gamma,\, d(x,F) \leq k\}$. Consequently, we can assume that $d(x,F) \leq k+1$ so that

$$\frac{[d(x,F)+1]^2}{k+1} \leq \frac{d^2(x,F)}{k+1} + 2.$$

Therefore, the term I_2 can be estimated by

$$\begin{aligned}
|I_2| &\lesssim \frac{1}{\sqrt{k+1}} \sum_{x,y\in\Gamma} |P^k f(x) - P^k f(y)||P^k f(x)| e^{\frac{3c}{2}\frac{d^2(x,F)}{k+1}} m(x)m(y) \\
&\lesssim \frac{1}{\sqrt{k+1}} \left(\sum_{x,y\in\Gamma} |P^k f(x) - P^k f(y)|^2 e^{c\frac{d^2(x,F)}{k+1}} m(x)m(y) \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \left(\sum_{x,y\in\Gamma} |P^k f(x)|^2 e^{2c\frac{d^2(x,F)}{k+1}} m(x)m(y) \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{k+1}} \sqrt{I} \left\| P^k f e^{c\frac{d^2(.,F)}{k+1}} \right\|_{L^2} \\
&\lesssim \sqrt{\frac{I}{k+1}} \|f\|_{L^2},
\end{aligned} \tag{C.22}$$

where we used again Proposition C.2.8 for the last line.

The estimates (C.21) and (C.22) yield

$$I \lesssim \frac{1}{k+1}\|f\|_{L^2}^2 + \sqrt{\frac{I}{k+1}}\|f\|_{L^2},$$

that is

$$I \lesssim \frac{1}{k+1}\|f\|_{L^2}^2,$$

which is the desired conclusion. □

Corollary C.2.11. *Let* (Γ,μ) *satisfying* (LB) *(note that* (DV) *is not assumed here). Let* $M \in \mathbb{N}$*. The following families of operators satisfy the Davies-Gaffney estimates*

(i) $s^{M+\frac{1}{2}}\nabla\Delta^M P^s$,

(ii) $s^{M+\frac{1}{2}}\nabla\Delta^M (I+s\Delta)^{-M-\frac{1}{2}}$.

Proof: According to Propositions C.2.5 and C.2.6, it is enough to check that $\sqrt{s}\nabla P^s$ and $\sqrt{s}\nabla(I+s\Delta)^{-\frac{1}{2}}$ satisfy Davies-Gaffney estimates.

Indeed, Proposition C.2.10 yields, if $E,F \subset \Gamma$, f supported in F and $c>0$ satisfy (C.20)

$$\begin{aligned}
\|\sqrt{s}\nabla P^s f\|_{L^2(E)} e^{\frac{c}{2}\frac{d(E,F)}{s+1}} &\le \sqrt{s}\left\| \nabla P^s f e^{\frac{c}{2}\frac{d^2(.,F)}{k+1}} \right\|_{L^2} \\
&\lesssim \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{s+1}} \le 1.
\end{aligned}$$

It suffices now to check that $\sqrt{s}\nabla(I+s\Delta)^{-\frac{1}{2}}$ satisfies Davies-Gaffney estimates. First notice that

$$\begin{aligned}
\|\sqrt{s}\nabla(I+s\Delta)^{-\frac{1}{2}} f\|_{L^2} &= \|(s\Delta)^{\frac{1}{2}}(I+s\Delta)^{-\frac{1}{2}} f\|_{L^2} \\
&= \left\| (I-(I+s\Delta)^{-1})^{\frac{1}{2}} f \right\|_{L^2} \\
&\le \|f\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

Then the family of operators $\sqrt{s}\nabla(I+s\Delta)^{-\frac{1}{2}}$ is L^2-uniformly bounded. Hence, we can suppose without loss of generality that $d(E,F)^2 \ge 1+s$. Write,

$$\begin{aligned}
(I+s\Delta)^{-\frac{1}{2}} f &= \frac{1}{\sqrt{1+s}}\left(I - \frac{s}{1+s}P \right)^{-\frac{1}{2}} f \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+s}} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\frac{s}{1+s}\right)^k P^k f
\end{aligned}$$

where $\sum a_k z^k$ is the Taylor series of the function $(1-z)^{-\frac{1}{2}}$ and the convergence holds in $L^2(\Gamma)$. Note that $a_k \simeq \sqrt{k+1}$ (see for example Lemma A.6.1) and

$$\begin{aligned}
\|\sqrt{s}\nabla(I+s\Delta)^{-\frac{1}{2}}f\|_{L^2(E)} &\lesssim \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{1+s}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{1+k}}\left(\frac{s}{1+s}\right)^k \|\nabla P^k f\|_{L^2(E)} \\
&\lesssim \|f\|_{L^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{1+k}\left(\frac{s}{1+s}\right)^k e^{-c\frac{d(E,F)^2}{1+k}} \\
&\lesssim \|f\|_{L^2}\frac{1}{d(E,F)^2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{s}{1+s}\right)^k e^{-c\frac{d(E,F)^2}{1+k}} \\
&\lesssim \|f\|_{L^2}\frac{1}{d(E,F)^2}\left[\sum_{k=0}^{s} e^{-c\left[\frac{d(E,F)^2}{1+k}+\frac{k}{1+s}\right]}\right. \\
&\qquad \left. + \sum_{k=s+1}^{\infty}\left(\frac{1+s}{1+k}\right)^2 e^{-c\left[\frac{d(E,F)^2}{1+k}+\frac{k}{1+s}\right]}\right]
\end{aligned}$$

where we used (i) for the second estimate and Lemma C.6.1 for the last one.

Arguing as in the proof of Proposition C.2.6, we find

$$\begin{aligned}
\|\sqrt{s}\nabla(I+s\Delta)^{-\frac{1}{2}}\|_{L^2(E)} &\lesssim \|f\|_{L^2}\frac{1+s}{d(E,F)^2}e^{-c\frac{d(E,F)}{\sqrt{1+s}}} \\
&\lesssim \|f\|_{L^2},
\end{aligned}$$

since we assumed that $d(E,F)^2 \geq 1+s$. □

Corollary C.2.12. *Let $M \in \mathbb{N}$. Then if $a = s^{M+\frac{1}{2}}d\Delta^M(I+s\Delta)^{-M-\frac{1}{2}}b$ is a $(BZ_2, M+\frac{1}{2}, \epsilon)$-molecule associated with the ball B, then*

$$\|a\|_{L^1(T_\Gamma)} \lesssim 1 \qquad \text{and} \qquad \|a\|_{L^2(T_{C_j(B)})} \lesssim \frac{2^{-j\epsilon}}{V(2^jB)^{\frac{1}{2}}} \quad \forall j \in \mathbb{N}^*.$$

Proof: First, notice that

$$\|a\|_{L^1(T_\Gamma)} \leq \sum_{j\geq 1} V(2^{j+1}B)^{\frac{1}{2}}\|x \mapsto \|a(x,.)\|_{T_x}\|_{L^2(C_j(B))}.$$

Then it remains to check the last claim, that is

$$\|a\|_{L^2(T_{C_j(B)})} := \|x \mapsto \|a(x,.)\|_{T_x}\|_{C_j(B)} \lesssim \frac{2^{-j\epsilon}}{V(2^jB)^{\frac{1}{2}}}.$$

Since $a = s^{M+\frac{1}{2}}d\Delta^M(I+s\Delta)^{-M-\frac{1}{2}}b$, then

$$x \mapsto \|a(x,.)\|_{T_x} = s^{M+\frac{1}{2}}\nabla\Delta^M(I+s\Delta)^{-M-\frac{1}{2}}b(x).$$

We conclude as in Proposition C.2.7, using the Davies-Gaffney estimates provided by Corollary C.2.11. □

C.2.4 Off diagonal decay for Littlewood-Paley functionals

Lemma C.2.13. *Let $M > 0$ and $\alpha \in [0,1]$. Define $\mathcal{A} = \{(A_l^{d,u})_{l\in\mathbb{N}^*},\ d \in \mathbb{R}_+,\ u \in \mathbb{N}\}$, where, for all $l \geq 1$,*

$$A_l^{d,u} = l^\alpha \frac{\exp\left(-\frac{d}{l+u}\right)}{(l+u)^{1+M}}.$$

Then there exists $C = C_{M,\alpha}$ such that

$$\left(\sum_{l\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{l}a_l^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq C\sum_{l\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{l}a_l \qquad \forall (a_l)_l \in \mathcal{A}.$$

Proof: The proof is similar to Proposition A.7.2. □

Lemma C.2.14. *Let $M \in \mathbb{N}^*$ and $\beta > 0$. Then there exists $C_{M,\beta}$ such that for all sets $E, F \subset \Gamma$, all f supported in F, all $s \in \mathbb{N}$ and all M-tuples $(s_1, \dots, s_M) \in [\![s, 2s]\!]^M$, one has*

$$\|L_\beta (I - P^{s_1}) \dots (I - P^{s_M}) f\|_{L^2(E)} \leq C_{M,\beta} \left(1 + \frac{d(E,F)^2}{s}\right)^{-M} \|f\|_{L^2}.$$

Proof: The proof follows the ideas of Lemma A.3.3 (or [BR09] Lemma 3.2 if $\beta = 1$). First, since L_β and $(I - P^{s_1}) \dots (I - P^{s_M})$ are L^2-bounded (uniformly in s) and without loss of generality, we can assume that $s \leq d(E,F)^2$.

Denote by η the only integer such that $\eta + 1 \geq \beta + M > \eta \geq 0$. Notice that $M - \eta \leq 1 - \beta < 1$ and thus $M - \eta \leq 0$.

We use the following fact, which is an immediate consequence of Proposition C.2.1

$$\Delta^{\beta+M} f = (I-P)^{\beta+M} f = \sum_{k \geq 0} a_k P^k (I-P)^{\eta+1} f \qquad \forall f \in L^2(\Gamma)$$

where $\sum a_k z^k$ is the Taylor series of the function $(1-z)^{\beta+M-\eta-1}$ Notice that if $\beta + M$ is an integer, then $a_k = \delta_0(k)$.

By the use of the generalized Minkowski inequality, we get

$$\begin{aligned}
&\left\|L_\beta (I-P^s)^M f\right\|_{L^2(E)} \\
&\leq \sum_{k\geq 0} a_k \left(\sum_{l \geq 1} l^{2\beta-1} \sum_{x \in E} \frac{m(x)}{V(x,\sqrt{l})} \sum_{y \in B(x,\sqrt{l})} m(y) |\Delta^{1+\eta-M} (I-P^{s_1}) \dots (I-P^{s_M}) P^{k+l-1} f(y)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\lesssim s^M \sup_{t \in [\![0,2Ms]\!]} \sum_{k \geq 0} a_k \left(\sum_{l\geq 1} l^{2\beta-1} \sum_{x \in E} \frac{m(x)}{V(x,\sqrt{l})} \sum_{y \in B(x,\sqrt{l})} m(y) |\Delta^{1+\eta} P^{k+l+t-1} f(y)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\lesssim s^M \sup_{t \in [\![0,2Ms]\!]} \sum_{k \geq 0} a_k \left(\sum_{l\geq 1} l^{2\beta-1} \sum_{y \in D_l(E)} m(y) |\Delta^{1+\eta} P^{k+l+t-1} f(y)|^2 \sum_{x \in B(y,\sqrt{l})} \frac{m(x)}{V(x,\sqrt{l})} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\lesssim s^M \sup_{t \in [\![0,2Ms]\!]} \sum_{k \geq 0} a_k \left(\sum_{l \geq 1} l^{2\beta-1} \|\Delta^{1+\eta} P^{k+l+t-1} f\|^2_{L^2(D_l(E))} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad := s^M \sup_{t \in [\![0,Ms]\!]} \Lambda(t)
\end{aligned}$$

where $D_l(E) = \{y \in \Gamma, \operatorname{dist}(y,E) < \sqrt{l}\}$, and where we notice that $\displaystyle\sum_{x \in B(y,\sqrt{l})} \frac{m(x)}{V(x,\sqrt{l})} \lesssim 1$ with the doubling property.

1- Estimate when $\mathbf{l < \frac{d(E,F)^2}{4}}$

The important point here is to notice that $\operatorname{dist}(F, D_l(E)) \geq \frac{1}{2} d(E,F) \gtrsim d(E,F)$. Then, using Davies-Gaffney estimates (Proposition C.2.6, (iii)) , we may obtain

$$\begin{aligned}
\|\Delta^{1+\eta} P^{k+l+t-1} f\|_{L^2(D_l(E))} &\lesssim \frac{\exp\left(-c\frac{d(E,F)^2}{l+k+t}\right)}{(l+k+t)^{(1+\eta)}} \|f\|_{L^2} \\
&\leq l^{M-\eta} \frac{\exp\left(-c\frac{d(E,F)^2}{l+k+t}\right)}{(l+k+t)^{1+M}} \|f\|_{L^2}
\end{aligned} \tag{C.23}$$

since $M - \eta \leq 0$.

2- Estimate when $\mathbf{l \geq \frac{d(E,F)^2}{4}}$

We use the analyticity of P to obtain,

$$\begin{aligned}
\|\Delta^{1+\eta} P^{k+l+t-1} f\|_{L^2(D_l(E))} &\leq \|(I-P)^{1+\eta} P^{k+l+t-1} f\|_{L^2(\Gamma)} \\
&\lesssim \frac{1}{(k+l+t)^{1+\eta}} \|f\|_{L^2} \\
&\lesssim l^{M-\eta} \frac{1}{(k+l+t)^{1+M}} \|f\|_{L^2} \\
&\lesssim l^{M-\eta} \frac{\exp\left(-c\frac{d(E,F)^2}{l+k+t}\right)}{(l+k+t)^{1+M}} \|f\|_{L^2}
\end{aligned} \tag{C.24}$$

where the third line is due to $M-\eta \leq 0$ and the last one holds because $l+k \gtrsim d(E,F)^2$.

3- Conclusion

The first two steps imply the following estimate on $\Lambda(t)$:

$$\begin{aligned}
\Lambda(t) &\lesssim \|f\|_{L^2(F)} \sum_{k\geq 0} a_k \left(\sum_{l\geq 1} \frac{1}{l} \left| l^{(\beta+M-\eta)} \frac{\exp\left(-c\frac{d(E,F)^2}{l+k+t}\right)}{(k+l+t)^{1+M}} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\lesssim \|f\|_{L^2(F)} \sum_{k\geq 0} a_k \sum_{l\geq 1} \frac{1}{l} l^{(\beta+M-\eta)} \frac{\exp\left(-c\frac{d(E,F)^2}{l+k+t}\right)}{(k+l+t)^{1+M}}
\end{aligned}$$

where we used Lemma C.2.13 for the last line (indeed, $\beta+M-\eta \in (0,1]$). Check that Thus since

$$\sum_{k=0}^{m-1} a_k (m-k)^{\beta+M-\eta-1} \lesssim 1.$$

Indeed, when $\beta+M-\eta = 1$, the result is obvious. Otherwise, it is a consequence of the fact that $a_k \simeq k^{\eta-M-\beta}$ (see Lemma A.6.1). Hence, one has

$$\begin{aligned}
\Lambda(t) &\lesssim \|f\|_{L^2(F)} \sum_{m\geq 1} \frac{\exp\left(-c\frac{d(E,F)^2}{m+t}\right)}{(m+t)^{1+M}} \\
&= d(E,F)^{-2(1+M)} \|f\|_{L^2(F)} \sum_{m\geq 1} \frac{d(E,F)^{2(1+M)}}{(m+t)^{1+M}} \exp\left(-c\frac{d(E,F)^2}{m+t}\right) \\
&\lesssim d(E,F)^{-2(1+M)} \|f\|_{L^2(F)} \left[\sum_{m=1}^{d(E,F)^2} 1 + \sum_{m > d(E,F)^2} \frac{d(E,F)^{2(1+M)}}{(m+t)^{1+M}} \right] \\
&\lesssim d(E,F)^{-2M} \|f\|_{L^2(F)}.
\end{aligned}$$

As a consequence,

$$\left\| L_\beta (I-P^s)^M f \right\|_{L^2(E)} \lesssim \left(\frac{d(E,F)^2}{s} \right)^{-M} \|f\|_{L^2(F)}$$

which is the desired conclusion.

□

Lemma C.2.15. *Let $M \in \mathbb{R}_+^*$ and $\beta > 0$ such that either $M \in \mathbb{N}$ or $\beta \geq 1$. Define the Littlewood-Paley functional G_β on $L^2(\Gamma)$ by*

$$G_\beta f(x) = \left(\sum_{l\leq 1} l^{2\beta-1} |\Delta^\beta P^{l-1} f(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \qquad \forall x \in \Gamma.$$

Then there exists $C_M > 0$ such that for all sets $E, F \subset \Gamma$, all functions f supported in F and all $s \in \mathbb{N}$, one has

$$\left\| G_\beta (s\Delta)^M f \right\|_{L^2(E)} \leq C_M \left(\frac{d(E,F)^2}{s} \right)^{-M} \|f\|_{L^2}.$$

Proof: The proof is similar to the one of Lemma C.2.14. Notice that $\sup_{t \in [\![0, Ms]\!]} \Lambda(t)$ is replaced by $\Lambda := \Lambda(0)$. Then the end of the calculus is the same provided that $\eta - M \geq 0$, which is the case under our assumption on M and β. See also Lemma A.6.1. □

Lemma C.2.16. *Let $M \in \mathbb{N}$. Then there exists $C_M > 0$ such that for all sets $E, F \subset \Gamma$, all f supported in F and all $s \in \mathbb{N}$, one has*

$$\left\| L_{\frac{1}{2}} (I - (I + s\Delta)^{-1})^{M + \frac{1}{2}} f \right\|_{L^2(E)} \leq C_M \left(1 + \frac{d(E,F)^2}{s} \right)^{-M - \frac{1}{2}} \|f\|_{L^2}.$$

Proof: Since $L_{\frac{1}{2}}$ and $(I - (I+s\Delta)^{-1})^{M+\frac{1}{2}}$ are L^2-bounded (uniformly in s) and without loss of generality, we can assume that $s \leq d(E,F)^2$.

We use the following computation,

$$\begin{aligned} (I + s\Delta)^{-M-\frac{1}{2}} f = ((1+s)I - sP)^{-M-\frac{1}{2}} &= (1+s)^{-M-\frac{1}{2}} \left(I - \frac{s}{1+s} P \right)^{-M-\frac{1}{2}} f \\ &= (1+s)^{-M-\frac{1}{2}} \sum_{k \geq 0} a_k \left(\frac{s}{1+s} \right)^k P^k f \end{aligned} \tag{C.25}$$

where $\sum a_k z^k$ is the Taylor series of the function $(1-z)^{-M-\frac{1}{2}}$ and the convergence holds in $L^2(\Gamma)$.

By the use of the generalized Minkowski inequality, we get

$$\begin{aligned} &\left\| L_{\frac{1}{2}} (I - (I + s\Delta)^{-1})^{M + \frac{1}{2}} f \right\|_{L^2(E)} \\ &\quad \leq \frac{s^{M+\frac{1}{2}}}{(1+s)^{M+\frac{1}{2}}} \sum_{k \geq 0} a_k \left(\frac{s}{1+s} \right)^k \left(\sum_{l \geq 1} \sum_{x \in E} \frac{m(x)}{V(x, \sqrt{l})} \sum_{y \in B(x, \sqrt{l})} m(y) |\Delta^{1+M} P^{k+l-1} f(y)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \leq \frac{s^{M+\frac{1}{2}}}{(1+s)^{M+\frac{1}{2}}} \sum_{k \geq 0} a_k \left(\frac{s}{1+s} \right)^k \left(\sum_{l \geq 1} \sum_{y \in D_l(E)} m(y) |\Delta^{1+M} P^{k+l-1} f(y)|^2 \sum_{x \in B(y, \sqrt{l})} \frac{m(x)}{V(x, \sqrt{l})} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \lesssim \frac{s^{M+\frac{1}{2}}}{(1+s)^{M+\frac{1}{2}}} \sum_{k \geq 0} a_k \left(\frac{s}{1+s} \right)^k \left(\sum_{l \geq 1} \|\Delta^{1+M} P^{k+l-1} f\|^2_{L^2(D_l(E))} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

When $l < \frac{d^2(E,F)}{4}$, notice that $d(F, D_l(E)) \gtrsim d(E,F)$ so that

$$\|\Delta^{1+M} P^{k+l-1} f\|_{L^2(D_l(E))} \lesssim \frac{\exp(-c\frac{d^2(E,F)}{l+k})}{(l+k)^{M+1}} \|f\|_{L^2}. \tag{C.26}$$

Moreover, when $l \geq \frac{d^2(E,F)}{4}$, one has

$$\begin{aligned} \|\Delta^{1+M} P^{k+l-1} f\|_{L^2(D_l(E))} &\leq \|\Delta^{1+M} P^{k+l-1} f\|_{L^2} \\ &\lesssim \frac{1}{(l+k)^{M+1}} \|f\|_{L^2} \\ &\lesssim \frac{\exp(-c\frac{d^2(E,F)}{l+k})}{(l+k)^{M+1}} \|f\|_{L^2}. \end{aligned} \tag{C.27}$$

As a consequence

$$\begin{aligned}
\left\| L_{\frac{1}{2}}(I-(I+s\Delta)^{-1})^{M+\frac{1}{2}} f\right\|_{L^2(E)} &\lesssim \frac{s^{M+\frac{1}{2}}}{(1+s)^{M+\frac{1}{2}}}\|f\|_{L^2} \sum_{k\geq 0} a_k \left(\frac{s}{1+s}\right)^k \left(\sum_{l\geq 1} \frac{\exp(-c\frac{d^2(E,F)}{l+k})}{(l+k)^{2(M+1)}}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\lesssim \frac{s^{M+\frac{1}{2}}}{(1+s)^{M+\frac{1}{2}}}\|f\|_{L^2} \sum_{k\geq 0} a_k \left(\frac{s}{1+s}\right)^k \left(\sum_{n\geq 1} \frac{\exp(-c\frac{d^2(E,F)}{n})}{n^{2(M+1)}}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\lesssim \frac{s^{M+\frac{1}{2}}}{d(E,F)^{2M+1}} \frac{1}{(1+s)^{M+\frac{1}{2}}}\|f\|_{L^2} \sum_{k\geq 0} a_k \left(\frac{s}{1+s}\right)^k \\
&= \left(\frac{s}{d(E,F)^2}\right)^{M+\frac{1}{2}} (1+s(1-1))^{-M-\frac{1}{2}}\|f\|_{L^2} \\
&= \left(\frac{s}{d(E,F)^2}\right)^{M+\frac{1}{2}} \|f\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

□

Let us now recall a result that can be found in Theorem A.2.5.

Proposition C.2.17. *Assume that* (Γ,μ) *satisfy* (UE). *Let* $K>0$ *and* $j\in\mathbb{N}$. *There exist* $C,c>0$ *such that for all sets* $E,F\in\Gamma$ *and all* $x_0\in\Gamma$ *all* $l\in\mathbb{N}^*$ *satisfying*

$$\sup_{y\in F} d(x_0,y)\leq Kd(E,F) \tag{C.28}$$

or

$$\sup_{y\in F} d(x_0,y)\leq K\sqrt{l} \tag{C.29}$$

and all functions f *supported in* F, *there holds*

$$\|\Delta^j P^{l-1} f\|_{L^2(E)} \leq \frac{C}{l^j}\frac{1}{V(x_0,\sqrt{l})^{\frac{1}{2}}} e^{-c\frac{d(E,F)^2}{l}}\|f\|_{L^1(F)}$$

and

$$\|\nabla\Delta^j P^{l-1} f\|_{L^2(E)} \leq \frac{C}{l^{j+\frac{1}{2}}}\frac{1}{V(x_0,\sqrt{l})^{\frac{1}{2}}} e^{-c\frac{d(E,F)^2}{l}}\|f\|_{L^1(F)}.$$

Lemma C.2.18. *Assume that* (Γ,μ) *satisfy* (UE). *For all* $M\in\mathbb{N}^*$ *and all* $\beta>0$, *there exists* $C_M>0$ *such that for all disjoint sets* $E,F\in\Gamma$ *and all* x_0 *satisfying* (C.28), *all* f *supported in* F *and all* $s\in\mathbb{N}^*$, *one has*

$$\left\|L_\beta(I-P^s)^M f\right\|_{L^2(E)} \leq \frac{C_M}{V(x_0,d(E,F))^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{d(E,F)^2}{s}\right)^{-M}\|f\|_{L^1}.$$

Proof: The proof of this Lemma is similar to the one of Lemma C.2.14 and we only indicate the main changes.

When $l<\frac{d(E,F)^2}{4}$, replace first (C.23) by

$$\begin{aligned}
\|\Delta^{1+\eta}P^{k+l+t-1}f\|_{L^2(D_l(E))} &\lesssim \frac{1}{V(x_0,\sqrt{k+l+t})^{\frac{1}{2}}}\frac{\exp\left(-c\frac{d(E,F)^2}{l+k+t}\right)}{(l+k+t)^{(1+\eta)}}\|f\|_{L^1} \\
&\lesssim \frac{l^{M-\eta}}{V(x_0,d(E,F))^{\frac{1}{2}}}\frac{\exp\left(-c\frac{d(E,F)^2}{l+k+t}\right)}{(l+k+t)^{1+M}}\|f\|_{L^1}
\end{aligned} \tag{C.30}$$

where the second line holds because $M-\eta\leq 0$ and the first one holds by Proposition C.2.17. Indeed, there exists $K>0$ such that

$$\sup_{y\in F} d(x_0,y)\leq Kd(E,F).$$

Thus, x_0, $D_l(E)$ and F satisfy (C.28) with constant $4K$.

When $l \geq \frac{d(E,F)^2}{4}$, replace also (C.24) by

$$\begin{aligned} \|\Delta^{1+\eta} P^{k+l+t-1} f\|_{L^2(D_l(E))} &\lesssim \frac{1}{V(x_0, \sqrt{k+l+t})^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{(k+l+t)^{1+\eta}} \|f\|_{L^1} \\ &\lesssim \frac{l^{M-\eta}}{V(x_0, d(E,F))^{\frac{1}{2}}} \frac{\exp\left(-c\frac{d(E,F)^2}{l+k+t}\right)}{(k+l+t)^{1+M}} \|f\|_{L^1} \end{aligned} \tag{C.31}$$

where the first line follows from Proposition C.2.17, since x_0, F and $k+l+t$ satisfy (C.29), and the second line to the facts that $k+l \gtrsim d(E,F)^2$ and $M-\eta \leq 0$. □

Lemma C.2.19. *Assume that* (Γ, μ) *satisfy* (UE)*. For all* $M > 0$ *, there exists* C_M *such that for all sets* $E, F \in \Gamma$ *and all* x_0 *satisfying* (C.28)*, all* f *supported in* F *and all* $s \in \mathbb{N}^*$*, one has*

$$\left\| L_{\frac{1}{2}} (I - (I+s\Delta)^{-1})^{M+\frac{1}{2}} f \right\|_{L^2(E)} \leq \frac{C_M}{V(x_0, d(E,F))^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{d(E,F)^2}{s} \right)^{-M-\frac{1}{2}} \|f\|_{L^1}.$$

Proof: The proof of this Lemma is similar to the one of Lemma C.2.16 and we only indicate the main changes.

When $l < \frac{d(E,F)^2}{4}$, replace (C.26) by

$$\begin{aligned} \|\Delta^{1+M} P^{k+l-1} f\|_{L^2(D_l(E))} &\lesssim \frac{1}{V(x_0, \sqrt{k+l})^{\frac{1}{2}}} \frac{\exp\left(-c\frac{d(E,F)^2}{l+k}\right)}{(l+k)^{(1+M)}} \|f\|_{L^1} \\ &\lesssim \frac{1}{V(x_0, d(E,F))^{\frac{1}{2}}} \frac{\exp\left(-c\frac{d(E,F)^2}{l+k}\right)}{(l+k)^{1+M}} \|f\|_{L^1} \end{aligned} \tag{C.32}$$

where the first line holds due to Lemma C.2.17 since x_0, $D_l(E)$ and F satisfy (C.28).

When $l \geq \frac{d(E,F)^2}{4}$, replace also (C.27) by

$$\begin{aligned} \|\Delta^{1+M} P^{k+l-1} f\|_{L^2(D_l(E))} &\lesssim \frac{1}{V(x_0, \sqrt{k+l})^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{(k+l)^{1+M}} \|f\|_{L^1} \\ &\lesssim \frac{1}{V(x_0, d(E,F))^{\frac{1}{2}}} \frac{\exp\left(-c\frac{d(E,F)^2}{l+k}\right)}{(k+l)^{1+M}} \|f\|_{L^1} \end{aligned} \tag{C.33}$$

where the second line follows from Lemma C.2.17, since x_0, F and $k+l+t$ satisfy (C.29), and the third line to the fact that $k+l \gtrsim d(E,F)^2$. □

C.3 BMO spaces

C.3.1 Dense sets in Hardy spaces

Lemma C.3.1. *Let* $M \in \mathbb{N}$ *and* $\kappa \in \{1,2\}$*.*

For all $\epsilon \in (0, +\infty)$*, we have the following inclusion*

$$\mathcal{M}_0^{M,\epsilon}(\Gamma) \hookrightarrow H^1_{BZ\kappa,M,\infty}(\Gamma)$$

and for all $\phi \in \mathcal{M}_0^{M,\epsilon}(\Gamma)$*,*

$$\|\phi\|_{H^1_{BZ\kappa,M,\infty}} \leq C_{M,\epsilon} \|\phi\|_{\mathcal{M}_0^{M,\epsilon}}.$$

Proof: Let ϕ in $\mathcal{M}_0^{M,\epsilon}(\Gamma)$. Then there exists $\varphi \in L^2(\Gamma)$ such that $\phi = \Delta^M \varphi$ and for all $j \geq 1$,

$$\|\varphi\|_{L^2(C_j(B_0))} 2^{j\epsilon} \lesssim \|\phi\|_{\mathcal{M}_0^{M,\epsilon}}.$$

Observe that

$$\varphi(x) = \sum_{y \in \Gamma} a_y \frac{\mathbb{1}_{\{y\}}(x)}{m(y)} \qquad \forall x \in \Gamma \tag{C.34}$$

where $a_y = \varphi(y) m(y)$. In order to prove that $\phi \in H^1_{BZ\kappa,M,\infty}$, it suffices to prove

(i) for every $y \in \Gamma$, $\Delta^M \frac{1_{\{y\}}}{m(y)}$ is, up to a harmless multiplicative constant, a (BZ_κ, M)-atom,

(ii) $\displaystyle\sum_{y\in\Gamma} |a_y| \lesssim \|\phi\|_{\mathcal{M}_0^{M,\epsilon}}$,

(iii) $\displaystyle\phi = \sum_{y\in\Gamma} a_y \Delta^M \frac{\mathbb{1}_{\{y\}}}{m(y)}$ where the convergence holds in $L^1(\Gamma)$.

It is easy to check that $\Delta^M \frac{1_{\{y\}}}{m(y)}$ is a (BZ_1, M)-atom associated with $s = 1$, $(1, \dots, 1)$ and the ball $B(y, 1)$. When $\kappa = 2$, notice that

$$\Delta^M \frac{\mathbb{1}_{\{y\}}}{m(y)} = \left(I - (I + (M^2+1)\Delta)^{-1}\right)^M \left(\frac{I + (M^2+1)\Delta}{M^2+1}\right)^M \frac{\mathbb{1}_{\{y\}}}{m(y)}.$$

Moreover, $\left(\frac{I+(M^2+1)\Delta}{M^2+1}\right)^M \frac{1_{\{y\}}}{m(y)}$ is supported in $B(y, M+1)$ and

$$\begin{aligned}
\left\| \left(\frac{I + (M^2+1)\Delta}{M^2+1}\right)^M \frac{\mathbb{1}_{\{y\}}}{m(y)} \right\|_{L^2} &\leq \left(\frac{2M^2+3}{M^2+1}\right)^M \left\| \frac{\mathbb{1}_{\{y\}}}{m(y)} \right\|_{L^2} \\
&\lesssim \frac{1}{m(y)^{\frac{1}{2}}} \\
&\lesssim \frac{1}{V(y, M+1)^{\frac{1}{2}}}.
\end{aligned}$$

For point (ii), remark that

$$\begin{aligned}
\sum_{y\in\Gamma} |a_y| &= \sum_{j\geq 1} \sum_{y \in C_j(B_0)} |a_y| \\
&\leq \sum_{j\geq 1} \left(\sum_{y\in C_j(B_0)} \frac{|a_y|^2}{m(y)} \right)^{\frac{1}{2}} (m(C_j(B_0)))^{\frac{1}{2}} \\
&\lesssim \sum_{j\geq 1} V(2^j B_0)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{y\in C_j(B_0)} |\varphi(y)|^2 m(y) \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \sum_{j\geq 1} V(2^j B_0)^{\frac{1}{2}} \|\varphi\|_{L^2(C_j(B_0))} \\
&\leq \sum_{j\geq 1} 2^{-j\epsilon} \|\phi\|_{\mathcal{M}_0^{M,\epsilon}} \\
&\lesssim \|\phi\|_{\mathcal{M}_0^{M,\epsilon}}.
\end{aligned}$$

For point (iii), notice that (ii) implies the L^1-convergence in (C.34). The result is then a consequence of the L^1-boundedness of Δ. □

Lemma C.3.2. *Let $M \in \mathbb{N}^*$ and let $B \subset \Gamma$ be a ball. For all $s \in \mathbb{N}^*$, define A_s as either $(I - P^{s_1}) \dots (I - P^{s_M})$ with $(s_1, \dots, s_M) \in [\![1, 2s]\!]^M$, or $(I - (I + s\Delta)^{-1})^M$. If $\varphi \in L^2(B)$ then, for all $s \in \mathbb{N}^*$, $\epsilon > 0$ and $M \in \mathbb{N}^*$, $A_s\varphi \in \mathcal{M}_0^{M,\epsilon}(\Gamma)$.*

As a consequence, if $f \in \mathcal{E}_M$ for some $M \in \mathbb{N}$, then for all $s \in \mathbb{N}$ we can define $A_s f$ as a linear form on finitely supported functions and

$$A_s f \in L^2_{loc}(\Gamma)$$

Remark C.3.3. *In the case of graphs, a distribution g is in $L^2_{loc}(\Gamma)$ means that we can write $g(x)$ for all $x \in \Gamma$, that is g is a function. On the contrary, notice that each function on Γ belongs to $L^2_{loc}(\Gamma)$ and we use then the notation $L^2_{loc}(\Gamma)$ only by analogy to the case of continuous spaces.*

Proof: Fix $\epsilon > 0$ and let $\varphi \in L^2(B)$ for some ball B and $k \in \mathbb{N}$ such that $B \subset 2^{k+2}B_0$. The uniform L^2-boundedness of $A_s(s\Delta)^{-M}$ yields

$$\sup_{j\in[\![1,k+1]\!]} 2^{j\epsilon} V(2^j B_0)^{\frac{1}{2}} \left\| A_s \Delta^{-M} \varphi \right\|_{L^2(C_j(B_0))} \lesssim s^M 2^{k\epsilon} V(2^k B_0)^{\frac{1}{2}} \|\varphi\|_{L^2(B)}.$$

Moreover, Proposition C.2.6 implies, for $j \geq k+2$

$$\begin{aligned} 2^{j\epsilon} V(2^j B_0)^{\frac{1}{2}} \left\| A_s \Delta^{-M} \varphi \right\|_{L^2(C_j(B_0))} &\lesssim s^M 2^{j\epsilon} V(2^j B_0)^{\frac{1}{2}} e^{-c\frac{2^j}{\sqrt{s}}} \|\varphi\|_{L^2(B)} \\ &\lesssim s^{M+\frac{\epsilon}{2}+\frac{d_0}{4}+1} V(B_0)^{\frac{1}{2}} \|\varphi\|_{L^2(B)} \end{aligned}$$

where d_0 is given by Proposition C.1.5. One concludes that $A_s\varphi \in \mathcal{M}_0^{M,\epsilon}(\Gamma)$ and

$$\|A_s\varphi\|_{\mathcal{M}_0^{M,\epsilon}} \lesssim s^{M+\frac{\epsilon}{2}+\frac{d_0}{4}+1} 2^{k\epsilon} V(2^k B_0)^{\frac{1}{2}} \|\varphi\|_{L^2(B)}. \tag{C.35}$$

Let us prove the second claim of the lemma. Let ϵ such that $f \in (\mathcal{M}_0^{M,\epsilon}(\Gamma))^*$. For all balls B and all functions φ supported in B, one has

$$\begin{aligned} |\langle A_s f, \varphi\rangle| &:= |\langle f, A_s\varphi\rangle| \\ &\lesssim \|f\|_{(\mathcal{M}_0^{M,\epsilon})^*} \|A_s\varphi\|_{\mathcal{M}_0^{M,\epsilon}} \\ &\lesssim \|f\|_{(\mathcal{M}_0^{M,\epsilon})^*} \|\varphi\|_{L^2(B)}, \end{aligned}$$

which proves the lemma since the estimate works for any ball B and any $\varphi \in L^2(B)$. □

Definition C.3.4. *Let $\kappa \in \{1,2\}$ and $M \in \mathbb{N}^*$. Define $\mathbb{H}^1_{BZ\kappa,M,\epsilon}(\Gamma)$ as the subset of $H^1_{BZ\kappa,M,\epsilon}(\Gamma)$ made of the functions g that can be written as $g = \sum_{i=0}^N \lambda_i a_i$ where $\lambda_i \in \mathbb{R}$ and a_i is a (BZ_κ, M, ϵ)-molecule and*

$$\sum_{i=0}^N |\lambda_i| \lesssim 2\|g\|_{H^1_{A,\epsilon}}.$$

Lemma C.3.5. *For $\kappa \in \{1,2\}$ and $M \in \mathbb{N}^*$, the set $\mathbb{H}^1_{BZ\kappa,M,\epsilon}(\Gamma)$ is dense in $H^1_{BZ\kappa,M,\epsilon}(\Gamma)$.*

Remark C.3.6. *This lemma is identical to Lemma 4.5 in [BZ08]. However, we present here a different proof.*

Proof: Let $\kappa \in \{1,2\}$ and $M \in \mathbb{N}^*$.

Let $f \in H^1_{BZ\kappa,M,\epsilon}(\Gamma)$. There exist a numerical sequence $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N})$ and a sequence $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ of (BZ_κ, M, ϵ)-molecules such that $f = \sum \lambda_i a_i$ and

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} |\lambda_i| \leq \frac{3}{2}\|f\|_{H^1_{BZ\kappa,M,\epsilon}}.$$

Let $\eta \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$. There exists $N \in \mathbb{N}$ such that $\sum_{i>N} |\lambda_i| \leq \eta \|f\|_{H^1_{BZ\kappa,M,\epsilon}}$. We set $g = \sum_{i=0}^{N} \lambda_i a_i$. Then

$$\begin{aligned} \|f-g\|_{H^1_{BZ\kappa,M,\epsilon}} &= \left\| \sum_{i>N} \lambda_i a_i \right\|_{H^1_{BZ\kappa,M,\epsilon}} \\ &\leq \sum_{i>N} |\lambda_i| \leq \eta \|f\|_{H^1_{BZ\kappa,M,\epsilon}} \end{aligned}$$

and, therefore $\|f\|_{H^1_{BZ\kappa,M,\epsilon}} \leq \|g\|_{H^1_{BZ\kappa,M,\epsilon}} + \eta\|f\|_{H^1_{BZ\kappa,M,\epsilon}}$, which implies

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^N |\lambda_i| &\leq \frac{3}{2}\|f\|_{H^1_{BZ\kappa,M,\epsilon}} \\ &\leq \frac{3}{2(1-\eta)}\|g\|_{H^1_{BZ\kappa,M,\epsilon}} \\ &\leq 2\|g\|_{H^1_{BZ\kappa,M,\epsilon}}. \end{aligned}$$

□

Lemma C.3.7. *Let $\kappa \in \{1,2\}$ and $M \in \mathbb{N}$. Let $0 < \epsilon < \bar{\epsilon} \leq +\infty$. Then $\mathbb{H}^1_{BZ\kappa,M,\bar{\epsilon}}(\Gamma) \subset \mathcal{M}_0^{M,\epsilon}$.*

Proof: Since $\mathcal{M}_0^{M,\epsilon}$ is a vector space, it is enough to prove that for each $(BZ_\kappa, M, \bar{\epsilon})$-molecule a, one has $a \in \mathcal{M}_0^{M,\epsilon}$.

Notice that the case $\bar{\epsilon} = \infty$ is proven in Lemma C.3.2. Let $\bar{\epsilon} < +\infty$ and $a = A_s b$ be a $(BZ_\kappa, M, \bar{\epsilon})$-molecule associated with $s \in \mathbb{N}^*$ and the ball B of radius $\sqrt{s}$. For all $j \geq 1$, Corollary C.5.2 provides a covering of $C_j(B)$ with balls of radius $\sqrt{s}$ and with bounded overlapping. We label these balls as $(B_i)_{i \in I_j}$. . Consequently,

$$\begin{aligned}
\|a\|_{\mathcal{M}_0^{M,\epsilon}} &\leq \sum_{j \geq 1} \|A_s(b \mathbb{1}_{C_j(B)})\|_{\mathcal{M}_0^{M,\epsilon}} \\
&\leq \sum_{j \geq 1} \sum_{i \in I_j} \|A_s(b \mathbb{1}_{B_i})\|_{\mathcal{M}_0^{M,\epsilon}}.
\end{aligned}$$

Moreover, $d(B_i, B_0) \lesssim 2^{j+k}$ where k is such that $B \subset 2^{k+2} B_0$. Thus Lemma C.3.2 implies

$$\begin{aligned}
\|a\|_{\mathcal{M}_0^{M,\epsilon}} &\leq C_s \sum_{j \geq 1} \sum_{i \in I_j} 2^{(j+k)\epsilon} V(2^{j+k} B_0)^{\frac{1}{2}} \|b\|_{L^2(B_i)} \\
&\leq C_s \sum_{j \geq 1} 2^{(j+k)\epsilon} V(2^{j+k} B_0)^{\frac{1}{2}} \|b\|_{L^2(\tilde{C}_j(B))} \\
&\leq C_s \sum_{j \geq 1} \frac{2^{(j+k)\epsilon}}{2^{j\bar{\epsilon}}} \left(\frac{V(2^{j+k} B_0)}{V(2^{j-1} B)} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C_s 2^{k(\epsilon + \frac{d}{2})} \sum_{j \geq 1} 2^{j(\epsilon - \bar{\epsilon})} \\
&< +\infty
\end{aligned}$$

where $\tilde{C}_j$ denote $C_j(B) \cup C_{j-1}(B) \cup C_{j+1}(B)$, and where we use the definition of a $(BZ_\kappa, M, \bar{\epsilon})$-molecule for the third line and the fact that $2^{j+k} B_0 \subset 2^{j+k+2} B$. □

C.3.2 Inclusions between BMO spaces

Lemma C.3.8. *There exists $C > 0$ such that for all $s \in \mathbb{N}^*$, all M-tuples $(s_1, \dots, s_M) \in [\![s, 2s]\!]^M$, all balls B of radius $\sqrt{s}$ and all functions $f \in BMO_{BZ2,M}$, one has*

$$\|(I - P^{s_1}) \dots (I - P^{s_M}) f\|_{L^2(B)} \leq C V(B)^{\frac{1}{2}} \|f\|_{BMO_{BZ2,M}}.$$

Proof: For $s \in \mathbb{N}^*$, the operator Q_s stands for

$$Q_s := \frac{1}{s} \sum_{k=0}^{s-1} P^k = (I - P^s)(s\Delta)^{-1}.$$

For all $s \in \mathbb{N}^*$, all $s_0 \in [\![s, 2s]\!]$ and all $f \in \mathcal{E}_0$, one has

$$\begin{aligned}
(I - P^{s_0}) f &= (I - P^{s_0})(I + s\Delta)(I + s\Delta)^{-1} f \\
&= \left(\frac{1}{s} \sum_{k=0}^{s_0 - 1} P^k f \right) (I + s\Delta) s\Delta (I + s\Delta)^{-1} f \\
&= \left[\frac{s_0}{s} Q_{s_0} + (I - P^{s_0}) \right] (I - (I + s\Delta)^{-1}) f
\end{aligned}$$

Recall that all terms make sense and are in $L^2_{loc}(\Gamma)$, according to Lemma C.3.2. As a consequence, for $(s_1, \dots, s_M) \in [\![s, 2s]\!]^M$, one has

$$(I - P^{s_1}) \dots (I - P^{s_M}) f = \prod_{i=1}^{M} \left[\frac{s_i}{s} Q_{s_i} + (I - P^{s_i}) \right] (I - (I + s\Delta)^{-1})^M f \tag{C.36}$$

Since $\frac{s_i}{s} \leq 2$, Proposition C.2.6 yields that $\displaystyle\prod_{i=1}^{M} \left[\frac{s_i}{s} Q_{s_i} + (I - P^{s_i})\right]$ satisfies Gaffney-Davies estimates. Hence,

$$\begin{aligned}
\|(I-P^{s_1})\dots(I-P^{s_M})f\|_{L^2(B)} &\leq \sum_{j\geq 1} \left\| \prod_{i=1}^{M} \left[\frac{s_i}{s} Q_{s_i} + (I-P^{s_i})\right] \left[\mathbb{1}_{C_j(B)} (I-(I+s\Delta)^{-1})^M f\right] \right\|_{L^2(B)} \\
&\lesssim \sum_{j\geq 1} e^{-c4^j} \|(I-(I+s\Delta)^{-1})^M f\|_{L^2(C_j(B))} \\
&\lesssim \sum_{j\geq 1} e^{-c4^j} \|(I-(I+s\Delta)^{-1})^M f\|_{L^2(2^{j+1}B)} \\
&\lesssim \sum_{j\geq 1} e^{-c4^j} V(2^{j+1}B)^{\frac{1}{2}} \|f\|_{BMO_{BZ2,M}} \\
&\lesssim V(B)^{\frac{1}{2}} \|f\|_{BMO_{BZ2,M}}
\end{aligned}$$

where the last line holds thanks to Proposition C.1.5. □

Corollary C.3.9. *Let $M \in \mathbb{N}^*$. Then $BMO_{BZ2,M}(\Gamma) \subset BMO_{BZ1,M}(\Gamma)$. More precisely, for all $f \in BMO_{BZ2,M}(\Gamma)$,*

$$\|f\|_{BMO_{BZ1,M}} \lesssim \|f\|_{BMO_{BZ2,M}}.$$

Proof: Immediate consequence of Lemma C.3.8. □

We want now to prove the converse inclusion, that is $BMO_{BZ1,M}(\Gamma) \subset BMO_{BZ2,M}(\Gamma)$. We begin with the next proposition, inspired from Proposition 2.6 in [DY05b].

Proposition C.3.10. *Let $M \in \mathbb{N}^*$. There exists $C > 0$ only depending on Γ and M such that for all $f \in BMO_{BZ1,M}(\Gamma)$, for all balls $B = B(x_0, \sqrt{s})$ and all integers $(a, b_1, \dots, b_M) \in \mathbb{N} \times [\![0, 2s]\!]^M$,*

$$\|P^a(I-P^{b_1})\dots(I-P^{b_M})f\|_{L^2(B)} \leq C a_s^{\frac{d_0+1}{2}} V(B)^{\frac{1}{2}} \|f\|_{BMO_{BZ1,M}}$$

where $a_s = \max\left\{1, \frac{a}{s}\right\}$.

Remark C.3.11. *We can replace $a_s^{d_0+1}$ by $a_s^{d_0+\epsilon}$ with $\epsilon > 0$ in the conclusion of the Proposition C.3.10 (in this case, C depends on ϵ).*

Proof: (Proposition C.3.10)

(1) Let us prove the proposition when $s \leq \min_{i \in [\![1,M]\!]} b_i$. The case where $a = 0$ is a consequence of the definition of $BMO_{BZ1,M}$ and will therefore be skipped. Let $(B_i)_{i\in I_j}$ be the covering of $C_j(B)$ provided by Corollary C.5.2. Then,

$$\begin{aligned}
&\|P^a(I-P^{b_1})\dots(I-P^{b_M})f\|_{L^2(B)} \\
&\quad\lesssim \|(I-P^{b_1})\dots(I-P^{b_M})f\|_{L^2(C_1(B))} + \sum_{j\geq 2} \exp\left(-c\frac{4^j b}{a}\right) \|(I-P^{b_1})\dots(I-P^{b_M})f\|_{L^2(C_j(B))} \\
&\quad\leq \|(I-P^{b_1})\dots(I-P^{b_M})f\|_{L^2(4B)} + \sum_{j\geq 2} \exp\left(-c\frac{4^j b}{a}\right) \|(I-P^{b_1})\dots(I-P^{b_M})f\|_{L^2(2^{j+1}B)} \\
&\quad\lesssim V(4B)^{\frac{1}{2}} \|f\|_{BMO_{BZ1,M}} + \sum_{j\geq 2}\sum_{i\in I_j} \exp\left(-c\frac{4^j b}{a}\right) \|(I-P^{b_1})\dots(I-P^{b_M})f\|_{L^2(B_i)} \\
&\quad\lesssim V(B)^{\frac{1}{2}} \|f\|_{BMO_{BZ1,M}} \left[1 + \sum_{j\geq 2} 2^{jd_0+1} \exp\left(-c\frac{4^j b}{a}\right)\right] \\
&\quad\lesssim V(B)^{\frac{1}{2}} \|f\|_{BMO_{BZ1,M}} a_s^{\frac{d_0+1}{2}}
\end{aligned} \tag{C.37}$$

where we use the Davies-Gaffney estimates for the first line and the doubling property for the last but one line.

(2) General case. For each $b_i < s$, write

$$(I - P^{b_i}) = (I - P^{2s}) - P^{b_i}(I - P^{2s-b_i}).$$

Hence, $P^a(I - P^{b_1})\dots(I - P^{b_M})$ can be written as a sum of terms

$$P^{\tilde{a}}(I - P^{\tilde{b}_1})\dots(I - P^{\tilde{b}_M})$$

where $\tilde{b}_i \in [\![s, 2s]\!]$ and $\tilde{a} \in [\![a, a + Ms]\!]$. The general case can be then deduced from the previous case.

$\square$

Proposition C.3.12. *Let $M \in \mathbb{N}^*$. There exists $C > 0$ such that for all balls B of radius $\sqrt{s}$, all integers $b \in [\![0, 2s]\!]$ and all $f \in BMO_{BZ1,M}$, one has*

$$\|(I - (I + b\Delta)^{-1})^M f\|_{L^2(B)} \leq CV(B)^{\frac{1}{2}}\|f\|_{BMO_{BZ1,M}}.$$

Proof: Let $\varphi \in L^2(\Gamma)$ supported in B. Recall that Lemma C.3.2 states that φ, $(I - P^{k_1})\dots(I - P^{k_M})\varphi$ and $(I - (I + b\Delta)^{-1})^M\varphi$ are in $\mathcal{M}_0^{M,\epsilon}$ for all $\epsilon > 0$. Moreover, for all $b \in \mathbb{N}$, one has

$$\begin{aligned}(I + b\Delta)^{-1}\varphi &= (1 + b)^{-1}\left(I - \frac{b}{1+b}P\right)^{-1}\varphi \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{1+b}\right)\left(\frac{b}{1+b}\right)^k P^k\varphi\end{aligned}$$

where the convergence holds in $L^2(\Gamma)$. Consequently,

$$(I - (I + b\Delta)^{-1})\varphi = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{1+b}\right)\left(\frac{b}{1+b}\right)^k (I - P^k)\varphi$$

and thus,

$$(I - (I + b\Delta)^{-1})^M\varphi = \left(\frac{1}{1+b}\right)^M\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{b}{1+b}\right)^k\sum_{k_1+\dots+k_M=k}(I - P^{k_1})\dots(I - P^{k_M})\varphi$$

where the convergence still holds in $L^2(\Gamma)$.

In order to prove that the convergence holds in $\mathcal{M}_0^{M,\epsilon}$ for all $\epsilon > 0$, it suffices to show that

$$S := \left(\frac{1}{1+b}\right)^M\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{b}{1+b}\right)^k\sum_{k_1+\dots+k_M=k}\|(I - P^{k_1})\dots(I - P^{k_M})\varphi\|_{\mathcal{M}_0^{M,\epsilon}} < +\infty.$$

Indeed, according to (C.35), one has

$$\begin{aligned}S &\lesssim \left(\frac{1}{1+b}\right)^M\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{b}{1+b}\right)^k\sum_{k_1+\dots+k_M=k}k^{\frac{\epsilon}{2}+\frac{d}{4}+1}\|\varphi\|_{L^2(B)} \\ &\lesssim \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(k+1)^{M+\frac{\epsilon}{2}+\frac{d}{4}}}{(1+b)^M}\left(\frac{b}{1+b}\right)^k\|\varphi\|_{L^2(B)} \\ &\lesssim b^{\frac{\epsilon}{2}+\frac{d}{4}+2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(1+k)^2}\|\varphi\|_{L^2(B)} \\ &< +\infty\end{aligned}$$

where the third line comes from Lemma C.6.1.

For $f \in \mathcal{E}_M$, there exists $\epsilon > 0$ such that $(\mathcal{M}_0^{M,\epsilon})^*$. Moreover, Lemma C.3.2 states that $(I - (I + s\Delta)^{-1})^M f$ and $(I - P^{k_1}) \dots (I - P^{k_M}) f$ (for all $(k_1, \dots, k_M) \in \mathbb{N}^M$) are in $L^2_{loc}(\Gamma)$. As a consequence,

$$\begin{aligned}
&\|(I - (I + b\Delta)^{-1})^M f\|_{L^2(B)} \\
&\qquad = \sup_{\substack{\|\varphi\|_2 = 1 \\ \operatorname{Supp} \varphi \subset B}} |\left\langle f, (I - (I + b\Delta)^{-1})^M \varphi \right\rangle| \\
&\qquad \leq \left(\frac{1}{1+b}\right)^M \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{b}{1+b}\right)^k \sum_{k_1 + \dots + k_M = k} \sup_{\substack{\|\varphi\|_2 = 1 \\ \operatorname{Supp} \varphi \subset B}} |\left\langle f, (I - P^{k_1}) \dots (I - P^{k_M}) \varphi \right\rangle| \\
&\qquad = \left(\frac{1}{1+b}\right)^M \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{b}{1+b}\right)^k \sum_{k_1 + \dots + k_M = k} \|(I - P^{k_1}) \dots (I - P^{k_M}) f\|_{L^2(B)}
\end{aligned}$$

where the pairing is between $\mathcal{M}_0^{M,\epsilon}$ and its dual. Therefore

$$\begin{aligned}
\|(I - (I + b\Delta)^{-1})^M f\|_{L^2(B)} &\lesssim \left(\frac{1}{1+b}\right)^M \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{b}{1+b}\right)^k \sum_{k_1 + \dots + k_M = k} \|(I - P^{k_1}) \dots (I - P^{k_M}) f\|_{L^2(B)} \\
&\lesssim \left(\frac{1}{1+b}\right)^M \sum_{k=1}^{b} \left(\frac{b}{1+b}\right)^k \sum_{k_1 + \dots + k_M = k} \|(I - P^{k_1}) \dots (I - P^{k_M}) f\|_{L^2(B)} \\
&\quad + \left(\frac{1}{1+b}\right)^M \sum_{k=b+1}^{\infty} \left(\frac{b}{1+b}\right)^k \sum_{k_1 + \dots + k_M = k} \|(I - P^{k_1}) \dots (I - P^{k_M}) f\|_{L^2(B)} \\
&\quad := I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

We estimate the first term with Proposition C.3.10 and Lemma C.6.1:

$$\begin{aligned}
I_1 &\lesssim \sum_{k=1}^{b} \frac{(1+k)^{M-1}}{(1+b)^M} \left(\frac{b}{1+b}\right)^k \|f\|_{BMO_{BZ1,M}} V(B)^{\frac{1}{2}} \\
&\lesssim (1+b)^{-1} \sum_{k=0}^{b-1} \|f\|_{BMO_{BZ1,M}} V(B)^{\frac{1}{2}} \\
&\lesssim \|f\|_{BMO_{BZ1,M}} V(B)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

We turn now to the estimate of the second term. One has, using Proposition C.3.10 and Lemma C.6.1 again,

$$\begin{aligned}
I_2 &\lesssim \left(\frac{1}{1+b}\right)^M \sum_{k=b+1}^{\infty} \left(\frac{b}{1+b}\right)^k \sum_{k_1 + \dots + k_M = k} \|(I - P^{k_1}) \dots (I - P^{k_M}) f\|_{L^2(\sqrt{\frac{k}{b}} B)} \\
&\lesssim \sum_{k=b+1}^{\infty} \frac{1}{1+k} \left(\frac{1+k}{1+b}\right)^M \left(\frac{b}{1+b}\right)^k \|f\|_{BMO_{BZ1,M}} V\left(\sqrt{\frac{k}{b}} B\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\lesssim \sum_{k=b+1}^{\infty} \frac{1}{1+k} \left(\frac{1+k}{1+b}\right)^{M + \frac{d_0}{2} + 1} \left(\frac{b}{1+b}\right)^k \|f\|_{BMO_{BZ1,M}} V(B)^{\frac{1}{2}} \\
&\lesssim \sum_{k=b+1}^{\infty} \frac{1}{1+k} \left(\frac{1+k}{1+b}\right)^{-1} \|f\|_{BMO_{BZ1,M}} V(B)^{\frac{1}{2}} \\
&\lesssim \|f\|_{BMO_{BZ1,M}} V(B)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

where we used Proposition C.1.5 for the third line. □

Corollary C.3.13. *Let $M \in \mathbb{N}$. Then $BMO_{BZ1,M}(\Gamma) \subset BMO_{BZ2,M}(\Gamma)$. More precisely, for all $f \in BMO_{BZ1,M}(\Gamma)$,*

$$\|f\|_{BMO_{BZ2,M}} \lesssim \|f\|_{BMO_{BZ1,M}}.$$

Proof: Immediate consequence of Proposition C.3.12. □

C.3.3 Duals of Hardy spaces

Proposition C.3.14. *Let $\kappa \in \{1,2\}$ and $M \in \mathbb{N}^*$.*

Let ℓ be a bounded linear functional on $H^1_{BZ\kappa,M,\infty}(\Gamma)$. Then ℓ actually belongs to $BMO_{BZ\kappa,M}(\Gamma) \cap \mathcal{F}_M$ and for all $g \in \mathbb{H}^1_{BZ\kappa,M,\infty}(\Gamma)$, there holds

$$\ell(g) = \langle \ell, g \rangle \tag{C.38}$$

where the pairing is between $\mathcal{M}_0^{M,\epsilon}(\Gamma)$ and its dual. Moreover,

$$\|\ell\|_{BMO_{BZ\kappa,M}} \lesssim \|\ell\|_{(H^1_{BZ\kappa,M,\infty})^*}$$

Proof: Let $\kappa \in \{1,2\}$ and $M \in \mathbb{N}$.

Let ℓ in $\left[H^1_{BZ\kappa,M,\infty}(\Gamma)\right]^*$. According to Lemma C.3.1, $\ell \in \bigcap_{\epsilon>0} \left[\mathcal{M}_0^{M,\epsilon}\right]^* = \mathcal{F}_M$. The following two claims

(i) $\mathbb{H}^1_{BZ\kappa,M,\infty}(\Gamma) \subset \mathcal{M}_0^{M,\epsilon}$,

(ii) $\mathbb{H}^1_{BZ\kappa,M,\infty}(\Gamma)$ is dense in $H^1_{BZ\kappa,M,\infty}(\Gamma)$,

are respectively a consequence of Lemma C.3.7 and of Lemma C.3.5. They imply that (C.38) makes sense and uniquely describes ℓ.

It remains to check the last claim, that is

$$\|\ell\|_{BMO_A} \lesssim \|\ell\|_{(H^1_{BZ\kappa,M,\infty})^*}$$

Fix $s \in \mathbb{N}^*$, a M-tuple $(s_1,\dots,s_M) \in [\![s,2s]\!]^M$, and a ball B of radius $\sqrt{s}$. We wrote A_s for $(I - P^{s_1})\dots(I-P^{s_M})$ if $\kappa = 1$ and for $(I-(I+s\Delta)^{-1})^M$ if $\kappa = 2$.

Let $\varphi \in L^2(B)$ with norm 1. Then

$$\frac{1}{V(B)^{\frac{1}{2}}} A_s \varphi$$

is a (BZ_κ, M)-atom. Thus,

$$\left\| \frac{1}{V(B)^{\frac{1}{2}}} A_s \varphi \right\|_{H^1_{BZ\kappa,M,\infty}} \leq 1,$$

i.e.,

$$\begin{aligned}\frac{1}{V(B)^{\frac{1}{2}}} |\langle A_s\ell, \varphi\rangle| &= \frac{1}{V(B)^{\frac{1}{2}}} |\langle \ell, A_s\varphi\rangle| \\ &\lesssim \|\ell\|_{(H^1_{BZ\kappa,M,\infty})^*}.\end{aligned}$$

Lemma C.3.2 provides that $A_s\ell \in L^2_{loc}(\Gamma)$. Taking the supremum over all φ supported in B, we obtain

$$\left(\frac{1}{V(B)} \sum_{x\in B} |A_s\ell(x)|^2 m(x)\right)^{\frac{1}{2}} \lesssim \|\ell\|_{(H^1_{BZ\kappa,M,\infty})^*}.$$

Finally, taking the supremum over all $s \in \mathbb{N}^*$, all M-tuples $(s_1,\dots,s_M) \in [\![s,2s]\!]^M$ and all balls B of radius $\sqrt{s}$ leads us to the result. □

Proposition C.3.15. *Let $\kappa \in \{1,2\}$ and $M \in \mathbb{N}^*$.*

Let $\epsilon > 0$ and $f \in BMO_{BZ\kappa,M}(\Gamma) \cap \mathcal{F}_M$. The linear functional given by

$$\ell(g) := \langle f, g \rangle$$

initially defined on $\mathbb{H}^1_{BZ\kappa,M,2\epsilon}(\Gamma)$, and where the pairing is between $\mathcal{M}_0^{M,\epsilon}$ and its dual, has a unique bounded extension to $H^1_{BZ\kappa,M,2\epsilon}(\Gamma)$ with

$$\|\ell\|_{(H^1_{BZ\kappa,M,2\epsilon})^*} \lesssim \|f\|_{BMO_{BZ\kappa,M}(\Gamma)}.$$

Proof: Let $\kappa \in \{1,2\}$ and $M \in \mathbb{N}^*$. In the proof, A_s will denote $(I - P^{s_1}) \dots (I - P^{s_M})$ (for some $(s_1, \dots, s_M) \in [\![s, 2s]\!]^M$) or $(I - (I + s\Delta)^{-1})^M$, depending whether κ is equal to 1 or 2.

Let us prove that for every $(BZ_\kappa, M, 2\epsilon)$-molecule a, one has

$$| \langle f, a \rangle | \lesssim \|f\|_{BMO_{BZ\kappa,M}}. \tag{C.39}$$

Since $f \in \mathcal{F}_M$, then $f \in \left(\mathcal{M}_0^{M,\epsilon}\right)^*$. In particular, Lemma C.3.2 provides that $A_s f \in L^2_{loc}(\Gamma)$. Thus, if $a = A_s b$ is a $(BZ_\kappa, M, 2\epsilon)$-molecule associated with a ball B of radius $\sqrt{s}$, we may write

$$\begin{aligned}
| \langle f, a \rangle | &= \left| \sum_{x \in \Gamma} A_s f(x) b(x) m(x) \right| \\
&\leq \sum_{j \geq 1} \|A_s f\|_{L^2(C_j(B))} \|b\|_{L^2(C_j(B))} \\
&\leq \sum_{j \geq 1} 2^{-2j\epsilon} V(2^j B)^{-\frac{1}{2}} \|A_s f\|_{L^2(2^{j+1}B)} \\
&\lesssim \sum_{j \geq 1} 2^{-2j\epsilon} V(2^j B)^{-\frac{1}{2}} V(2^{j+1}B)^{\frac{1}{2}} \|f\|_{BMO_{BZ\kappa,M}} \\
&\lesssim \|f\|_{BMO_{BZ\kappa,M}},
\end{aligned}$$

where we used for the last but one line Proposition C.3.10 (if $\kappa = 1$) or Proposition C.3.8 and Corollary C.3.9 (if $\kappa = 2$).

Our next step is to show that for every $g \in \mathbb{H}^1_{BZ\kappa,M,2\epsilon}$, we have

$$| \langle f, g \rangle | \lesssim \|g\|_{H^1_{BZ\kappa,M,2\epsilon}} \|f\|_{BMO_{BZ\kappa,M}}.$$

Indeed, let $N \in \mathbb{N}$, $(\lambda_i)_i \in [\![0, N]\!] \in \mathbb{R}^N$ and $(a_i = A_{s_i} b_i)_{i \in [\![0,N]\!]}$ a sequence of $(BZ_\kappa, M, 2\epsilon)$-molecules that satisfies $g = \sum \lambda_i a_i$ and $\sum |\lambda_i| \lesssim 2\|g\|_{H^1_{BZ\kappa,M,2\epsilon}}$, then

$$\begin{aligned}
|\ell\,(g)| &\leq \sum_{i=0}^{N} |\lambda_i| \, |\ell(a_i)| \\
&\lesssim \|f\|_{BMO_{BZ\kappa,M}} \sum_{i=0}^{N} |\lambda_i| \\
&\lesssim \|f\|_{BMO_{BZ\kappa,M}} \|g\|_{H^1_{BZ\kappa,M,2\epsilon}}.
\end{aligned}$$

Since $\mathbb{H}^1_{BZ\kappa,M,2\epsilon}$ is dense in $H^1_{BZ\kappa,M,2\epsilon}$, ℓ has an unique bounded extension that satisfies

$$\|\ell\|_{(H^1_{BZ\kappa,M,2\epsilon})^*} \lesssim \|f\|_{BMO_{BZ\kappa,M}}.$$

$\square$

Proposition C.3.16. *Let $\kappa \in \{1,2\}$ and $M \in \mathbb{N}^*$.*

Let $f \in BMO_{BZ\kappa,M}(\Gamma)$ and let $\epsilon > 0$ such that $f \in (\mathcal{M}_0^{M,\epsilon}(\Gamma))^*$. The linear functional given by

$$\ell(g) := \langle f, g \rangle$$

initially defined on $\mathbb{H}^1_{BZ\kappa,M,\infty}(\Gamma)$ which is a dense subset of $\mathcal{M}_0^{M,\epsilon}$, and where the pairing is that between $\mathcal{M}_0^{M,\epsilon}$ and its dual, has a unique extension to $H^1_{BZ\kappa,M,\infty}(\Gamma)$ with

$$\|\ell\|_{(H^1_{BZ\kappa,M,\infty})^*} \lesssim \|f\|_{BMO_{BZ\kappa,M}}.$$

Proof: Same proof than Proposition C.3.15 with obvious modifications. The only difference is: in Proposition C.3.15, $\epsilon > 0$ is given by the Hardy space $H^1_{BZ\kappa,M,2\epsilon}$ and in Proposition C.3.16, $\epsilon > 0$ is given by the functional $f \in \mathcal{E}_M$. $\square$

We turn now to the proof of Theorem C.1.35.

Proof: Let $\kappa \in \{1,2\}$ and $M \in \mathbb{N}^*$.

Proposition C.3.14 and Corollary C.3.16 provide the continuous embeddings

$$(H^1_{BZ\kappa,M,\infty})^* \hookrightarrow BMO_{BZ\kappa,M} \cap \mathcal{F}_M \hookrightarrow BMO_{BZ\kappa,M} \hookrightarrow (H^1_{BZ\kappa,M,\infty})^*.$$

As a consequence, $BMO_{BZ\kappa,M}$ is the dual space of $H^1_{BZ\kappa,M,\infty}$ and is actually included in $\mathcal{F}_M$.

Besides, Propositions C.3.14 and C.3.16 yield, for any $\epsilon > 0$

$$(H^1_{BZ\kappa,M,\infty})^* \hookrightarrow BMO_{BZ\kappa,M} \cap \mathcal{F}_M \hookrightarrow (H^1_{BZ\kappa,M,\epsilon})^*.$$

Since the inclusion $(H^1_{BZ\kappa,M,\epsilon})^* \hookrightarrow (H^1_{BZ\kappa,M,\infty})^*$ is obvious, we obtain that $BMO_{BZ\kappa,M} \cap \mathcal{F}_M = BMO_{BZ\kappa,M}$ is also the dual space of $H^1_{BZ\kappa,M,\epsilon}$.

The last claim of the Theorem, that is for a fixed $M \in \mathbb{N}^*$, the spaces $H^1_{BZ\kappa,M,\epsilon}(\Gamma)$ for $\kappa \in \{1,2\}$ and $\epsilon \in (0,+\infty]$ are all equivalent, is only a consequence of the proposition C.3.17 below. Indeed, for $m \in \mathbb{N}^*$ and $\kappa \in \{1,2\}$, the inclusion $H^1_{BZ\kappa,M,\epsilon} \subset H^1_{BZ\kappa,M,\eta}$ when $0 < \eta < \epsilon \leq +\infty$ is obvious and then Proposition C.3.17 yields the equality between the spaces $H^1_{BZ\kappa,M,\epsilon}$ for $\epsilon \in (0,+\infty]$, together with the equivalence of norms. It remains to check that, for example, $H^1_{BZ1,M,\infty} \subset H^1_{BZ2,M,1}$. For this, notice first that similarly to (C.36), for a (BZ_1, M)-atom a associated with $s \in \mathbb{N}^*$, $(s_1, \dots, s_m) \in [\![s, 2s]\!]^M$, a ball B of radius $\sqrt{s}$ and a function $b \in L^2(B)$, one has

$$\begin{aligned} a &= (I - P^{s_1}) \dots (I - P^{s_M}) b \\ &= (I - (I + s\Delta)^{-1})^M \prod_{i=1}^M \left[\frac{s_i}{s} Q_{s_i} + (I - P^{s_i}) \right] b. \end{aligned}$$

We have to check that $\prod_{i=1}^M \left[\frac{s_i}{s} Q_{s_i} + (I - P^{s_i}) \right] b$ satisfies, up to a multiplicative constant, the estimates given by (ii) of the definition of a $(BZ_2, M, 1)$-molecule. This calculus, which is a straightforward consequence of the Gaffney estimates provided by Proposition C.2.6, is left to the reader. □

Proposition C.3.17. *If $(E, \|.\|_E)$ and $(F, \|.\|_F)$ are two Banach spaces with the same dual $(G, \|.\|_G)$ and moreover if we have the continuous inclusion $E \subset F$, then $E = F$ with equivalent norms.*

Proof: Let T be the linear operator defined by

$$T: \, e \in E \mapsto e \in F.$$

T is bounded and its adjoint T^* is

$$T^* : g \in G \mapsto g \in G,$$

that is the identity on G. Theorem 4.15 in [Rud91] implies that $E = F$, and then, by the open mapping theorem, we deduce that the norm of E is dominated by the norm of F. □

C.4 Inclusions between Hardy spaces

C.4.1 $H^1_{BZ1,M,\epsilon} \cap L^2 \subset E^1_{quad,\beta}$: the case of functions

Proposition C.4.1. *Let $\epsilon > 0$, $M \in (\frac{d_0}{4}, +\infty) \cap \mathbb{N}$ and $\beta > 0$. Then $H^1_{BZ1,M,\epsilon}(\Gamma) \cap L^2(\Gamma) \subset E^1_{quad,\beta}(\Gamma)$ and*

$$\|f\|_{H^1_{quad,\beta}} \lesssim \|f\|_{H^1_{BZ1,M,\epsilon}}$$

Proof: Let $f \in H^1_{BZ1,M,\epsilon} \cap L^2(\Gamma)$. Then there exist $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell^1$ and $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ a sequence of $(BZ1, M, \epsilon)$-molecules such that $f = \sum \lambda_i a_i$ and

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} |\lambda_i| \simeq \|f\|_{H^1_{BZ1,M,\epsilon}}.$$

First, since $\|P^k\|_{1\to 1} \leq 1$ for all $k \in \mathbb{N}$, the operators Δ^β and then $\Delta^\beta P^{l-1}$ are L^1-bounded for $\beta > 0$ (see [CSC90]). Consequently,

$$\Delta^\beta P^{l-1} \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_i a_i = \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_i \Delta^\beta P^{l-1} a_i.$$

Since the space Γ is discrete, the L^1-convergence implies the pointwise convergence, that is, for all $x \in \Gamma$,

$$\begin{aligned}\left|\Delta^\beta P^{l-1} \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_i a_i(x)\right| &= \left|\sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_i \Delta^\beta P^{l-1} a_i(x)\right| \\ &\leq \sum_{i\in\mathbb{N}} |\lambda_i| \left|\Delta^\beta P^{l-1} a_i(x)\right|.\end{aligned}$$

From here, the estimate

$$\|L_\beta f\|_{L^1} = \left\| L_\beta \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_i a_i \right\|_{L^1} \lesssim \sum_{i\in\mathbb{N}} |\lambda_i| \|L_\beta a_i\|_{L^1}$$

is just a consequence of the generalized Minkowski inequality.

It remains to prove that there exists a constant C such that for all $(BZ1, M, \epsilon)$-molecules a, one has

$$\|L_\beta a\|_{L^1} \leq C. \tag{C.40}$$

Let $s \in \mathbb{N}^*$, $(s_1, \dots, s_M) \in [\![s, 2s]\!]^M$ and a ball B associated with the molecule a. By Hölder inequality and the doubling property, we may write

$$\|L_\beta a\|_{L^1} \lesssim \sum_{j=1}^{\infty} V(2^j B)^{\frac{1}{2}} \|L_\beta a\|_{L^2(C_j(B))}. \tag{C.41}$$

We will estimate now each term $\|L_\beta a\|_{L^2(C_j(B))}$.

The result is then a consequence of Lemma C.2.14 which can be reformulated as follows

$$\|L_\beta (I - P^{s_1}) \dots (I - P^{s_M})[f \mathbb{1}_F]\|_{L^2(E)} \leq C_M \left(1 + \frac{d(E,F)^2}{s}\right)^{-M} \|f\|_{L^2(F)}. \tag{C.42}$$

Notice that

$$d(C_k(B), C_j(B)) \simeq \left\{\begin{array}{ll} 0 & \text{if } |j-k| \leq 1 \\ 2^j \sqrt{s} & \text{if } k \leq j-2 \\ 2^k \sqrt{s} & \text{if } k \geq j+2 \end{array}\right. .$$

Thus,

$$\begin{aligned}\|L_\beta a\|_{L^2(C_j(B))} &\leq \sum_{k\geq 1} \|L_\beta (I - P^{s_1}) \dots (I - P^{s_M})[b \mathbb{1}_{C_k(B)}]\|_{L^2(C_j(B))} \\ &\lesssim \sum_{k \leq j-2} 4^{-jM} \|b\|_{L^2(C_k(B))} + \sum_{k=j-1}^{j+1} \|b\|_{L^2(C_k(B))} + \sum_{k\geq j+2} 4^{-kM} \|b\|_{L^2(C_k(B))} \\ &\lesssim \sum_{k \leq j-2} 4^{-jM} 2^{-\epsilon k} V(2^k B)^{-\frac{1}{2}} + 2^{-\epsilon j} V(2^j B)^{-\frac{1}{2}} + \sum_{k\geq j+2} 4^{-kM} 2^{-\epsilon j} V(2^k B)^{-\frac{1}{2}} \\ &\lesssim 2^{-\bar{\epsilon} j} V(2^j B)^{-\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

where $\bar{\epsilon} = \min\{\epsilon, 2M - \frac{d_0}{2}\}$.

As a consequence, one has

$$\begin{aligned}\|L_\beta a\|_{L^1} &\lesssim \sum_{j\geq 1} 2^{-\bar{\epsilon} j} \left(\frac{V(2^j B)}{V(2^j B)}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &< +\infty.\end{aligned}$$

□

Proposition C.4.2. *Let* (Γ, μ) *satisfying* (UE), $M \in \mathbb{N}^*$, $\epsilon > 0$ *and* $\beta > 0$. *Then* $H^1_{BZ1,M}(\Gamma) \cap L^2(\Gamma) \subset E^1_{quad,\beta}(\Gamma)$ *and*

$$\|f\|_{H^1_{quad,\beta}} \lesssim \|f\|_{H^1_{BZ1,M,\epsilon}}$$

Proof: As in the proof of Proposition C.4.1, it remains to check that for all $(BZ1, M, \epsilon)$-molecules $a = (I - P^{s_1}) \dots (I - P^{s_M})b$ associated with $s \in \mathbb{N}$, $(s_1, \dots, s_M)$ and $B = B(x_B, r_B)$, one has

$$\sum_{j=1}^{\infty} V(2^j B)^{\frac{1}{2}} \|L_\beta a\|_{L^2(C_j(B))} \lesssim 1.$$

The case $j = 1$ follows from the L^2-boundedness of L_β and of $(I - P^s)^M$, thus

$$\|L_\beta a\|_{L^2(C_j(B))} \lesssim \|a\|_{L^2} \lesssim \frac{1}{V(B)^{\frac{1}{2}}}.$$

For the case $j \geq 2$, we introduce $\tilde{C}_j(B)$ defined by

$$\tilde{C}_j(B) = \bigcup_{1 \leq k \leq j-2} C_k(B).$$

Check that $\tilde{C}_j(B)$, $C_j(B)$, and x_B satisfy (C.28), since $d(\tilde{C}_j(B), C_j(B)) \gtrsim 2^j r_B$. Thus, Lemma C.2.18 yields

$$\begin{aligned}
\|L_\beta a\|_{L^2(C_j(B))} &\leq \|L_\beta (I - P^s)^M [b \mathbb{1}_{\tilde{C}_j(B)}]\|_{L^2(C_j(B))} + \|L_\beta (I - P^s)^M [b \mathbb{1}_{\Gamma \backslash \tilde{C}_j(B)}]\|_{L^2(C_j(B))} \\
&\lesssim \frac{4^{-jM}}{V(x_B, 2^j r_B)^{\frac{1}{2}}} \|b\|_{L^1(\tilde{C}_j(B))} + \|b\|_{L^2(\Gamma \backslash \tilde{C}_j(B))} \\
&\lesssim \frac{2^{-j\bar{\epsilon}}}{V(2^j B)^{\frac{1}{2}}}
\end{aligned}$$

where $\bar{\epsilon} = \min\{2M, \epsilon\}$. Summing in $j \geq 1$ ends the proof. □

C.4.2 $H^1_{BZ2, M+\frac{1}{2}, \epsilon} \cap H^2 \subset E^1_{quad, \beta}$: the case of 1-forms

Proposition C.4.3. *Let $\epsilon > 0$, $M \in (\frac{d_0}{4} - \frac{1}{2}, +\infty) \cap \mathbb{N}$. Then $H^1_{BZ2, M+\frac{1}{2}}(T_\Gamma) \cap H^2(T_\Gamma) \subset E^1_{quad, \frac{1}{2}}(T_\Gamma)$ and*

$$\|f\|_{H^1_{quad, \frac{1}{2}}} \lesssim \|f\|_{H^1_{BZ2, M+\frac{1}{2}, \epsilon}}.$$

Proof: Let $F \in H^1_{BZ2, M+\frac{1}{2}, \epsilon}(T_\Gamma) \cap H^2(T_\Gamma)$. Then there exist $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \ell^1$ and $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ a sequence of $(BZ2, M + \frac{1}{2}, \epsilon)$-molecules such that $F = \sum \lambda_i a_i$ and

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} |\lambda_i| \simeq \|f\|_{H^1_{BZ1, M, \epsilon}}.$$

First, by L^1-boundedness of the operators P and d^* (see Proposition C.1.32) and by the Minkowski inequality, one has

$$\begin{aligned}
\|L_{\frac{1}{2}} \Delta^{-\frac{1}{2}} d^* F\|_{L^1} &= \sum_{x \in \Gamma} m(x) \left(\sum_{l \geq 1} \sum_{y \in B(x, \sqrt{l})} m(y) |P^{l-1} d^* F(y)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \sum_{x \in \Gamma} m(x) \left(\sum_{l \geq 1} \sum_{y \in B(x, \sqrt{l})} m(y) |P^{l-1} d^* \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda_i a_i(y)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\lesssim \sum_{i \in \mathbb{N}} |\lambda_i| \sum_{x \in \Gamma} m(x) \left(\sum_{l \geq 1} \sum_{y \in B(x, \sqrt{l})} m(y) |P^{l-1} d^* a_i(y)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

It remains to prove that there exists a constant C such that for all $(BZ2, M + \frac{1}{2}, \epsilon)$-molecules a, one has

$$\sum_{x \in \Gamma} m(x) \left(\sum_{l \geq 1} \sum_{y \in B(x, \sqrt{l})} m(y) |P^{l-1} d^* a_i(y)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \lesssim 1. \tag{C.43}$$

Let $a = d\Delta^{-\frac{1}{2}}(I-(I+s\Delta)^{-1})^{M+\frac{1}{2}}b$ be a $(BZ_2, M+\frac{1}{2}, \epsilon)$-molecule associated with $s \in \mathbb{N}^*$ and the ball B. Since $d^* d\Delta^{-\frac{1}{2}} = \Delta^{\frac{1}{2}}$, (C.43) becomes

$$\|L_{\frac{1}{2}}(I-(I+s\Delta)^{-1})^{M+\frac{1}{2}}b\| \lesssim 1.$$

We end the proof as we did for Proposition C.4.1, using Lemma C.2.16 instead of Lemma C.2.14. □

Proposition C.4.4. *Let* (Γ, μ) *satisfying* (UE). *Let* $\epsilon > 0$, $M \in \mathbb{N}$. *Then* $H^1_{BZ2,M+\frac{1}{2}}(T_\Gamma) \cap H^2(T_\Gamma) \subset E^1_{quad,\frac{1}{2}}(T_\Gamma)$ *and*

$$\|f\|_{H^1_{quad,\frac{1}{2}}} \lesssim \|f\|_{H^1_{BZ2,M+\frac{1}{2},\epsilon}}.$$

Proof: We begin the proof as the one of Proposition C.4.3. We end the proof as Proposition C.4.2 instead of Proposition C.4.1, using Lemma C.2.19 instead of Lemma C.2.16. □

C.4.3 $E^1_{quad,\beta} \subset H^1_{BZ2,M,\epsilon} \cap L^2$: the case of functions

In this paragraph, we will need a few results on tents spaces (see [CMS85], [Rus07], [HLM+11]). However, we need in our proofs some "discrete" tent spaces, defined below:

Definition C.4.5. *For* $x \in \Gamma$, *we recall*

$$\gamma(x) = \left\{(y,k) \in \Gamma \times \mathbb{N},\, d(x,y)^2 \leq k\right\}$$

and for a set $O \subset \Gamma$, *we define*

$$\hat{O} = \{(y,k) \in \Gamma \times \mathbb{N},\, d(y,O^c)^2 > k\}.$$

For a function F *defined on* $\Gamma \times \mathbb{N}$, *consider for all* $x \in \Gamma$

$$\mathcal{A}F(x) = \left(\sum_{(y,k)\in\gamma(x)} \frac{1}{k+1} \frac{m(y)}{V(x,\sqrt{k+1})} |F(y,k)|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

For $p \in [1,+\infty)$, *the tent space* $T^p_2(\Gamma)$ *is defined as the space of functions* F *on* $\Gamma \times \mathbb{N}$ *for which* $\mathcal{A}F \in L^p(\Gamma)$, *and is outfitted with the norm* $\|F\|_{T^p_2} = \|\mathcal{A}F\|_{L^p}$ *(the space* T^p_2 *is then complete).*

Definition C.4.6. *A function* A *on* $\Gamma \times \mathbb{N}$ *is said to be a* T^1_2*-atom if there exists a ball* $B \subset \Gamma$ *such that* A *is supported in* $\hat{B}$ *and*

$$\|A\|^2_{T^2_2} := \sum_{(x,k)\in\hat{B}} \frac{m(x)}{k+1}|A(x,k)|^2 \leq \frac{1}{V(B)}.$$

Proposition C.4.7. *For every element* $F \in T^1_2(\Gamma)$, *there exist a scalar sequence* $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \ell^1$ *and a sequence of* T^1_2*-atoms* $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *such that*

$$F = \sum_{i=0}^{+\infty} \lambda_i A_i \qquad \text{in } T^1_2(\Gamma). \tag{C.44}$$

Moreover,

$$\sum_{i\geq 0} |\lambda_i| \simeq \|F\|_{T^1_2}$$

where the implicit constants only depend on the constant in (DV). *Finally, if* $F \in T^1_2(\Gamma) \cap T^2_2(\Gamma)$, *then the decomposition* (C.44) *also converges in* $T^2_2(\Gamma)$.

Proof: This proof is analogous to the one of Theorem 1.1 in [Rus07] and of Theorem 4.10 in [HLM+11] with obvious modifications. □

We introduce the functional $\pi_{\eta,\beta}:\ T^2_2(\Gamma) \to L^2(\Gamma)$ defined for any real $\beta > 0$ and any integer $\eta \geq \beta$ by

$$\pi_{\eta,\beta}F(x) = \sum_{l\geq 1} \frac{c^\eta_l}{l^\beta}\left[\Delta^{\eta-\beta}(I+P)^\eta P^{l-1} F(.,l-1)\right](x)$$

where $\sum_{l\geq 1} c^\eta_l z^{l-1}$ is the Taylor series of the function $(1-z)^{-\eta}$.

Lemma C.4.8. *The operator $\pi_{\eta,\beta}$ is bounded from $T^2_2(\Gamma)$ to $L^2(\Gamma)$.*

Proof: Let $g \in L^2(\Gamma)$. Then, for all $F \in T^2_2(\Gamma)$,

$$\begin{aligned}
\langle \pi_{\eta,\beta} F, g\rangle &= \sum_{l\geq 1} \frac{c^\eta_l}{l^\beta} \left\langle \Delta^{\eta-\beta}(I+P)^\eta P^{l-1} F(.,l), g\right\rangle \\
&= \sum_{l\geq 1} \frac{c^\eta_l}{l^\beta} \left\langle F(.,l-1), \Delta^{\eta-\beta}(I+P)^\eta P^{l-1} g\right\rangle \\
&\leq \sum_{l\geq 1} \frac{c^\eta_l}{l^\beta} \|F(.,l-1)\|_{L^2} \|\Delta^{\eta-\beta}(I+P)^\eta P^{l-1} g\|_{L^2} \\
&\leq \left(\sum_{l\geq 1} \frac{1}{l} \|F(.,l-1)\|^2_{L^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{l\geq 1} l^{1-2\beta} (c^\eta_l)^2 \|\Delta^{\eta-\beta}(I+P)^\eta P^{l-1} g\|^2_{L^2}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\lesssim \|F\|_{T^2_2} \|(I+P)^\eta g\|_{L^2} \\
&\lesssim \|F\|_{T^2_2} \|g\|_{L^2}
\end{aligned}$$

where the last but one line comes from the L^2-boundedness of Littlewood-Paley functionals (since $l^{1-2\beta}(c^\eta_l)^2 \simeq l^{2(\eta-\beta)-1}$, see Lemma A.6.1). □

Lemma C.4.9. *Suppose that A is a $T^1_2(\Gamma)$-atom associated with a ball $B \subset \Gamma$. Then for every $M \in \mathbb{N}^*$, $\beta > 0$ and $\epsilon \in (0,+\infty)$, there exist an integer $\eta = \eta_{M,\beta,\epsilon}$ and a uniform constant $C_{M,\beta,\epsilon} > 0$ such that $C^{-1}_{M,\beta,\epsilon} \pi_{\eta,\beta}(A)$ is a (BZ_2, M, ϵ)-molecule associated with the ball B.*

Proof: Let $\eta = \lceil \frac{d_0}{4} + \frac{\epsilon}{2} + \beta \rceil + M + 1$, that is the only integer such that

$$\eta \geq \frac{d_0}{4} + \frac{\epsilon}{2} + \beta + M + 1 > \eta - 1.$$

Let A be a T^1_2-atom associated with a ball B of radius r. We write

$$a := \pi_{\eta,\beta}(A) = (I - (I + r^2\Delta)^{-1})^M b$$

where

$$b := \sum_{l\geq 1} \frac{c^\eta_l}{l^\beta} \left(\frac{I + r^2\Delta}{r^2}\right)^M \Delta^{\eta-\beta-M} (I+P)^\eta P^{l-1} A(.,l-1)$$

Let us check that a is a (BZ_2, M, ϵ)-molecule associated with B, up to multiplication by some harmless constant $C_{M,\epsilon}$. First, one has, for all $g \in L^2(4\eta B)$,

$$\begin{aligned}
|\langle b, g\rangle| &\leq \sum_{m=0}^{M} \frac{c_m}{r^{2(M-m)}} \sum_{l\geq 1} \frac{c_l^\eta}{l^\beta} \left|\left\langle \Delta^{\eta-\beta-M+m}(I+P)^\eta P^{l-1} A(.,l-1), g\right\rangle\right| \\
&= \sum_{m=0}^{M} \frac{c_m}{r^{2(M-m)}} \sum_{l\geq 1} \frac{c_l^\eta}{l^\beta} \left|\left\langle A(.,l-1), \Delta^{\eta-\beta-M+m}(I+P)^\eta P^{l-1} g\right\rangle\right| \\
&\lesssim \sum_{m=0}^{M} \frac{1}{r^{2(M-m)}} \sum_{l\geq 1} l^{\eta-\beta-1} \|A(.,l-1)\|_{L^2(B)} \|\Delta^{\eta-\beta-M+m}(I+P)^\eta P^{l-1} g\|_{L^2(B)} \\
&\lesssim \sum_{m=0}^{M} \frac{1}{r^{2(M-m)}} \|A\|_{T_2^2} \left(\sum_{l=1}^{r^2} l^{2(\eta-\beta)-1} \|\Delta^{\eta-\beta-M+m}(I+P)^\eta P^{l-1} g\|_{L^2(B)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\lesssim \sum_{m=0}^{M} \|A\|_{T_2^2} \left(\sum_{l=1}^{r^2} l^{2(\eta-\beta-M+m)-1} \|\Delta^{\eta-\beta-M+m}(I+P)^\eta P^{l-1} g\|_{L^2(B)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\lesssim \|A\|_{T_2^2} \sum_{m=0}^{M} \|G_{\eta-\beta-M+m}(I+P)^\eta g\|_{L^2} \\
&\lesssim \|A\|_{T_2^2} \|(I+P)^\eta g\|_{L^2} \\
&\lesssim \frac{1}{V(B)^{\frac{1}{2}}} \|g\|_{L^2}
\end{aligned}$$

where we used the L^2-boundedness of the quadratic Littlewood-Paley functional for the last but one line (see [Fen15b], [ALM14]).

Let $j > \log_2(\eta) + 1$ and $g \in L^2(C_j(B))$. Since $\operatorname{Supp}(I+P)^\eta g \in C_{j,\eta}(B) = \{x \in \Gamma, d(x, C_j(B)) \leq \eta\}$ and $d(C_{j,\eta}(B), B) \gtrsim 2^j r$,

$$\begin{aligned}
|\langle b, g\rangle| &\lesssim \sum_{m=0}^{M} \frac{1}{r^{2(M-m)}} \|A\|_{T_2^2} \left(\sum_{l=1}^{r^2} l^{2(\eta-\beta)-1} \|\Delta^{\eta-\beta-M+m}(I+P)^\eta P^{l-1} g\|_{L^2(B)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\lesssim \sum_{m=0}^{M} r^{2(\eta-\beta-M-1)} \|A\|_{T_2^2} \left(\sum_{l=1}^{r^2} l^{2(1+m)-1} \|\Delta^{\eta-\beta-M+m}(I+P)^\eta P^{l-1} g\|_{L^2(B)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\lesssim r^{2(\eta-\beta-M-1)} \|A\|_{T_2^2} \sum_{m=0}^{M} \left\|G_{1+m} \Delta^{\eta-\beta-M-1}(I+P)^\eta g\right\|_{L^2(B)} \\
&\lesssim \frac{r^{2(\eta-\beta-M-1)}}{(4^j r^2)^{\eta-\beta-M-1}} \|A\|_{T_2^2} \|(I+P)^\eta g\|_{L^2} \\
&\lesssim 2^{-j(\frac{d_0}{2}+\epsilon)} \|A\|_{T_2^2} \|g\|_{L^2} \\
&\lesssim \frac{2^{-j\epsilon}}{V(2^j B)^{\frac{1}{2}}} \|g\|_{L^2}
\end{aligned}$$

where we used Lemma C.2.15 for the last but two line and Proposition C.1.5 for the last one. We conclude that, up to multiplication by some harmless constant, b is a (BZ_2, M, ϵ)-molecule. □

Proposition C.4.10. *Let $M \in \mathbb{N}^*$, $\epsilon > 0$ and $\beta > 0$. Then $E^1_{quad,\beta}(\Gamma) \subset H^1_{BZ2,M,\epsilon}(\Gamma) \cap L^2(\Gamma)$ and*

$$\|f\|_{H^1_{BZ2,M,\epsilon}} \lesssim \|f\|_{H^1_{quad,\beta}}.$$

Proof: Let $f \in E^1_{quad,\beta}(\Gamma)$. We set

$$F(.,l) = [(l+1)\Delta]^\beta P^l f.$$

By definition of $H^1_{quad,\beta}(\Gamma)$, one has that $F \in T^1_2(\Gamma)$. Moreover, since $f \in L^2(\Gamma)$, L^2-boundedness of Littlewood-Paley functionals (see [BR09], [Fen15b]) yields that $F \in T^2_2(\Gamma)$. Thus, according to Lemma C.4.7, there exist a numerical sequence $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$ and a sequence of T^1_2-atoms $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ such that

$$F = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i A_i \qquad \text{in } T^1_2(\Gamma) \text{ and } T^2_2(\Gamma)$$

and

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} |\lambda_i| \lesssim \|F\|_{T^1_2} = \|f\|_{H^1_{quad,\beta}}.$$

Choose η as in Lemma C.4.9. Using Corollary C.2.3, since $f \in L^2(\Gamma)$,

$$\begin{aligned} f &= \pi_{\eta,\beta} F(.,l) \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} \lambda_i \pi_{\eta,\beta}(A_i) \end{aligned} \tag{C.45}$$

where the sum converges in $L^2(\Gamma)$. According to Lemma C.4.9, $\pi_{\eta,\beta}(A_i)$ are molecules and then (C.45) would provide a (M,ϵ)-representation of f if the convergence held in $L^1(\Gamma)$. By uniqueness of the limit, it remains to prove that $\sum \lambda_i \pi_{\eta,\beta}(A_i)$ converges in L^1. Indeed,

$$\begin{aligned} \sum_{i\in\mathbb{N}} |\lambda_i| \, \|\pi_{\eta,\beta}(A_i)\|_{L^1} &\lesssim \sum_{i\in\mathbb{N}} |\lambda_i| \\ &< +\infty \end{aligned}$$

where the first line comes from Proposition C.2.7 and the second one from the fact that $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N})$.
□

C.4.4 $E^1_{quad,\beta} \subset H^1_{BZ2,M+\frac{1}{2},\epsilon} \cap H^2$: the case of 1-forms

Lemma C.4.11. *Suppose that A is a $T^1_2(\Gamma)$-atom associated with a ball $B \subset \Gamma$. Let $M \in \mathbb{N}$ and $\epsilon > 0$, there exist an integer $\eta = \eta_{M,\epsilon}$ and a uniform constant $C_{M,\epsilon} > 0$ such that $C^{-1}_{M,\epsilon} d\Delta^{-\frac{1}{2}} \pi_{\eta,\frac{1}{2}}(A)$ is a $(BZ_2, M+\frac{1}{2}, \epsilon)$-molecule associated with the ball B.*

Proof: Let $\eta = \lceil \frac{d_0}{4} + \frac{\epsilon}{2} \rceil + M + 2$. We will also write t for $\lceil \frac{d_0}{4} + \frac{\epsilon}{2} \rceil \in \mathbb{N}^*$.

Let A be a T^1_2-atom associated with a ball B of radius r. We write

$$a := d\Delta^{-\frac{1}{2}} \pi_{\eta,\frac{1}{2}}(A) = r^{2M+1} d\Delta^M (I + r^2\Delta)^{-M-\frac{1}{2}} b$$

where

$$\begin{aligned} b &:= \sum_{l\geq 1} \frac{c_l^\eta}{\sqrt{l}} \left(\frac{I + r^2\Delta}{r^2} \right)^{M+\frac{1}{2}} \Delta^{\eta-1-M} (I+P)^\eta P^{l-1} A(.,l-1) \\ &= \sqrt{\frac{r^2}{1+r^2}} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\frac{r^2}{1+r^2} \right)^k \sum_{l\geq 1} \frac{c_l^\eta}{\sqrt{l}} \left(\frac{I + r^2\Delta}{r^2} \right)^{M+1} \Delta^{1+t} (I+P)^\eta P^{l+k-1} A(.,l-1) \end{aligned} \tag{C.46}$$

where $\sum a_k z^k$ is the Taylor series of the function $(1-z)^{-\frac{1}{2}}$ (cf (C.25)).

Let us check that a is a $(BZ_2, M+\frac{1}{2}, \epsilon)$-molecule associated with B, up to multiplication by some harmless constant $C_{M,\epsilon}$.

Let $g \in L^2(4\eta B)$. One has with the first equality in (C.46),

$$\begin{aligned}
|\langle b, g\rangle| &\leq r^{-2M-1} \sum_{l\geq 1} \frac{c_l^\eta}{\sqrt{l}} \left| \left\langle A(.,l-1), \left(I+r^2\Delta\right)^{M+\frac{1}{2}} \Delta^{1+t} (I+P)^\eta P^{l-1} g \right\rangle \right| \\
&\lesssim r^{-2M-1} \sum_{l\geq 1} \frac{c_l^\eta}{\sqrt{l}} \|A(.,l-1)\|_{L^2(B)} \| \left(I+r^2\Delta\right)^{M+\frac{1}{2}} \Delta^{1+t} (I+P)^\eta P^{l-1} g\|_{L^2} \\
&\lesssim \|A\|_{T_2^2} r^{-2M-1} \left(\sum_{l=1}^{r^2} l^{2(\eta-1)} \| \left(I+r^2\Delta\right)^{M+\frac{1}{2}} \Delta^{1+t} (I+P)^\eta P^{l-1} g\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\lesssim \|A\|_{T_2^2} r^{-2M-1} \left(\sum_{l=1}^{r^2} l^{2(1+t+M)} \| \left(I+r^2\Delta\right)^{M+\frac{1}{2}} \Delta^{1+t} (I+P)^\eta P^{l-1} g\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\lesssim \|A\|_{T_2^2} \|(I+P)^\eta g\|_{L^2} \\
&\lesssim \|A\|_{T_2^2} \|g\|_{L^2}
\end{aligned}$$

where we use that the functionals $g \mapsto r^{-2M-1} \left(\sum_{l=1}^{r^2} l^{2(1+t+M)} | \left(I+r^2\Delta\right)^{M+\frac{1}{2}} \Delta^{1+t} P^{l-1} g|^2 \right)^{1/2}$ are L^2-bounded uniformly in r. Indeed, since $(-1) \notin Sp(P)$, functional calculus provides, for some $a > -1$,

$$\begin{aligned}
\| \left(I+r^2\Delta\right)^{M+\frac{1}{2}} \Delta^{1+t} P^{l-1} g\|_{L^2}^2 &= \int_a^1 (1+r^2(1-\lambda))^{2M+1} (1-\lambda)^{2(1+t)} \lambda^{2(l-1)} dE_{gg}(\lambda) \\
&\lesssim \int_a^1 \left[1 + r^{2(2M+1)} (1-\lambda)^{2M+1} \right] (1-\lambda)^{2(1+t)} \lambda^{2(l-1)} dE_{gg}(\lambda).
\end{aligned}$$

Thus,

$$\begin{aligned}
& r^{-2(2M+1)} \sum_{l=1}^{r^2} l^{2(1+t+M)} \| \left(I+r^2\Delta\right)^{M+\frac{1}{2}} \Delta^{1+t} P^{l-1} g\|_{L^2}^2 \\
&\lesssim \int_a^1 (1-\lambda)^{2(1+t)} \sum_{l=1}^{r^2} l^{2(1+t)-1} \lambda^{2(l-1)} dE_{gg}(\lambda) + \int_a^1 (1-\lambda)^{2(1+t+M)+1} \sum_{l=1}^{r^2} l^{2(1+t+M)} \lambda^{2(l-1)} dE_{gg}(\lambda) \\
&\lesssim \int_a^1 (1-\lambda)^{2(1+t)} \sum_{l=1}^{\infty} l^{2(1+t)-1} \lambda^{2(l-1)} dE_{gg}(\lambda) + \int_a^1 (1-\lambda)^{2(1+t+M)+1} \sum_{l=1}^{\infty} l^{2(1+t+M)} \lambda^{2(l-1)} dE_{gg}(\lambda) \\
&\lesssim \int_a^1 \frac{(1-\lambda)^{2(1+t)}}{(1-\lambda^2)^{2(1+t)}} dE_{gg}(\lambda) + \int_a^1 \frac{(1-\lambda)^{2(1+t+M)+1}}{(1-\lambda^2)^{2(1+t+M)+1}} dE_{gg}(\lambda) \\
&\quad = \int_a^1 \left[(1+\lambda)^{-2(1+t)} + (1+\lambda)^{-2(1+t+M)-1} \right] dE_{gg}(\lambda) \\
&\lesssim \int_a^1 dE_{gg}(\lambda) = \|g\|_{L^2}^2
\end{aligned}$$

where the third inequality comes from the fact that $l^{\xi-1} \sim c_l^\xi$ (see Lemma A.6.1).

Let $j > \log_2(\eta)+1$ and $g \in L^2(C_j(B))$. One has $d(C_{j,\eta}(B), B) \gtrsim 2^j r$ (cf Lemma C.4.9). The second identity in (C.46) provides

$$
\begin{aligned}
|\langle b, g\rangle| &\leq \sum_{m=0}^{M+1} \frac{c_m}{r^{2(M+1-m)}} \sqrt{\frac{r^2}{1+r^2}} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\frac{r^2}{1+r^2}\right)^k \sum_{l\geq 1} \frac{c_l^\eta}{\sqrt{l}} \left|\langle A(.,l-1), \Delta^{1+t+m}(I+P)^\eta P^{l+k-1} g\rangle\right| \\
&\lesssim \sum_{m=0}^{M+1} \frac{c_m}{r^{2(M+1-m)}} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\frac{r^2}{1+r^2}\right)^k \sum_{l\geq 1} \frac{c_l^\eta}{\sqrt{l}} \|A(.,l-1)\|_{L^2(B)} \|\Delta^{1+t+m}(I+P)^\eta P^{l+k-1} g\|_{L^2(B)} \\
&\lesssim \|A\|_{T_2^2} \sum_{m=0}^{M+1} \frac{1}{r^{2(M+1-m)}} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\frac{r^2}{1+r^2}\right)^k \left(\sum_{l=1}^{r^2} l^{2(\eta-1)} \|\Delta^{1+t+m}(I+P)^\eta P^{l+k-1} g\|^2_{L^2(B)}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\lesssim \|A\|_{T_2^2} \|(I+P)^\eta g\|_{L^2} \sum_{m=0}^{M+1} r^{2(\eta-M-2+m)} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\frac{r^2}{1+r^2}\right)^k \left(\sum_{l=1}^{r^2} \frac{e^{-c\frac{4^j r^2}{l+k}}}{(l+k)^{2(1+t+m)}}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\lesssim \|A\|_{T_2^2} \|g\|_{L^2} \sum_{m=0}^{M+1} r^{2(t+m)} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\frac{r^2}{1+r^2}\right)^k \left(\sum_{l=1}^{\infty} \frac{e^{-c\frac{4^j r^2}{l+k}}}{(l+k)^{2(1+t+m)}}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\lesssim \|A\|_{T_2^2} \|g\|_{L^2} \sum_{m=0}^{M+1} r^{2(t+m)+1} \frac{1}{\sqrt{1+r^2}} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\frac{r^2}{1+r^2}\right)^k \frac{1}{(4^j r^2)^{t+m+\frac{1}{2}}} \\
&\lesssim \|A\|_{T_2^2} \|g\|_{L^2} \sum_{m=0}^{M+1} \frac{r^{2(t+m)+1}}{(4^j r^2)^{t+m+\frac{1}{2}}} (1+r^2(1-1))^{-\frac{1}{2}} \\
&\lesssim 2^{-j(2t+1)} \|A\|_{T_2^2} \|g\|_{L^2} \\
&\lesssim \frac{2^{-j\epsilon}}{V(2^j B)} \|g\|_{L^2}
\end{aligned}
$$

where we used the estimate (GUE) for the forth line. ☐

Proposition C.4.12. *Let $M \in \mathbb{N}$ and $\epsilon > 0$. Then $E^1_{quad,\frac{1}{2}}(T_\Gamma) \subset H^1_{BZ2,M+\frac{1}{2}}(T_\Gamma) \cap H^2(T_\Gamma)$ and*

$$\|G\|_{H^1_{BZ2,M+\frac{1}{2},\epsilon}} \lesssim \|G\|_{H^1_{quad,\frac{1}{2}}} \qquad \forall G \in E^1_{quad,\frac{1}{2}}(T_\Gamma)$$

Proof: Let $G \in E^1_{quad,\frac{1}{2}}(T_\Gamma)$. We set

$$F(.,l) = \sqrt{l+1} P^l d^* G.$$

By definition of $H^1_{quad,\frac{1}{2}}(T_\Gamma)$, one has that $F \in T_2^1(\Gamma)$. Moreover, Proposition C.1.32 yields that $\Delta^{-\frac{1}{2}} d^* G \in L^2(G)$ and therefore $F \in T_2^2(\Gamma)$ with the L^2-boundedness of Littlewood-Paley functionals.

Thus, according to Lemma C.4.7, there exist a scalar sequence $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N})$ and a sequence of T_2^1-atoms $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ such that

$$F = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i A_i \qquad \text{in } T_2^1(\Gamma) \text{ and in } T_2^2(\Gamma)$$

and

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} |\lambda_i| \lesssim \|F\|_{T_2^1} = \|G\|_{H^1_{quad,\frac{1}{2}}}.$$

Choose η as in Lemma C.4.9. Using Lemma C.2.3, since $\Delta^{-\frac{1}{2}} d^* G \in L^2(\Gamma)$,

$$
\begin{aligned}
\Delta^{-\frac{1}{2}} d^* G &= \pi_{\eta,\frac{1}{2}} F(.,l) \\
&= \sum_{i=0}^{+\infty} \lambda_i \pi_{\eta,\frac{1}{2}}(A_i)
\end{aligned}
$$

where the sum converges in $L^2(\Gamma)$. Recall that $d\Delta^{-1}d^* = Id_{H^2(T_\Gamma)}$. Moreover, $d\Delta^{-\frac{1}{2}}$ is bounded from $L^2(\Gamma)$ to $L^2(T_\Gamma)$ (see Proposition C.1.32). Then

$$G = \sum_{i=0}^{+\infty} \lambda_i d\Delta^{-\frac{1}{2}} \pi_{\eta,\frac{1}{2}}(A_i) \tag{C.47}$$

where the sum converges in $L^2(T_\Gamma)$. According to Lemma C.4.11, $d\Delta^{-\frac{1}{2}}\pi_{M,\frac{1}{2}}(A_i)$ are $(BZ2, M+\frac{1}{2}, \epsilon)$-molecules and then (C.47) would provide a $(BZ2, M+\frac{1}{2}, \epsilon)$-representation of f if the convergence held in $L^1(\Gamma)$. By uniqueness of the limit, it remains to prove that $\sum \lambda_i d\Delta^{-\frac{1}{2}}\pi_{\eta,\frac{1}{2}}(A_i)$ converges in L^1. Indeed,

$$\begin{aligned}\sum_{i\in\mathbb{N}} |\lambda_i| \left\| d\Delta^{-\frac{1}{2}}\pi_{\eta,\frac{1}{2}}(A_i)\right\|_{L^1(T_\Gamma)} &\lesssim \sum_{i\in\mathbb{N}} |\lambda_i| \\ &< +\infty\end{aligned}$$

where the first line comes from Corollary C.2.12 and the second one because $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N})$. □

C.4.5 Proof of Theorems C.1.36, C.1.38 and C.1.39

Proof: (Theorem C.1.36)

Let $\beta > 0$, $M \in \mathbb{N}^* \cap (\frac{d_0}{4}, +\infty)$ and $\epsilon > 0$. Propositions C.4.1 and C.4.10 yield the continuous embeddings

$$H^1_{BZ1,M,\epsilon}(\Gamma) \cap L^2(\Gamma) \subset E^1_{quad,\beta}(\Gamma) \subset H^1_{BZ2,M,\epsilon}(\Gamma) \cap L^2(\Gamma).$$

However, Theorem C.1.34 states that $H^1_{BZ1,M,\epsilon}(\Gamma) = H^1_{BZ2,M,\epsilon(\Gamma)}$. Thus, we deduce

$$H^1_{BZ1,M,\epsilon}(\Gamma) \cap L^2(\Gamma) = E^1_{quad,\beta}(\Gamma) = H^1_{BZ2,M,\epsilon}(\Gamma) \cap L^2(\Gamma) \tag{C.48}$$

with equivalent norms. In particular, $E^1_{quad,\beta}(\Gamma) \subset L^1(\Gamma)$.

Let us now prove that the completion of $E^1_{quad,\beta}(\Gamma)$ in L^1 exists. To that purpose, it is enough (see Proposition 2.2 in [AMM]) to check that, for all Cauchy sequences $(f_n)_n$ in $E^1_{quad,\beta}(\Gamma)$ that converges to 0 in $L^1(\Gamma)$, $f_n \to 0$ for the $\|.\|_{H^1_{quad,\beta}}$ norm. Equivalent norms in (C.48) implies that $(f_n)_n$ is a Cauchy sequence in $H^1_{BZ\kappa,M,\epsilon}(\Gamma)$ that converges to 0 in $L^1(\Gamma)$. Since $H^1_{BZ\kappa,M,\epsilon}(\Gamma)$ is complete, it follows that $f_n \to g$ for some $g \in H^1_{BZ\kappa,M,\epsilon}(\Gamma)$, but then also for the L^1-norm, which entails that $g = 0$. Thus, $f_n \to 0$ for the norm $H^1_{BZ\kappa,M,\epsilon}(\Gamma)$ and so for the norm $\|.\|_{H^1_{quad,\beta}}$ (the norms being equivalent on $E^1_{quad,\beta}(\Gamma)$).

Therefore, the completion $H^1_{quad,\beta}(\Gamma)$ of $E^1_{quad,\beta}(\Gamma)$ exists and is defined by

$$H^1_{quad,\beta}(\Gamma) = \{f \in F, \text{ there exists } (f_n)_n \text{ Cauchy sequence in } E^1_{quad,\beta}(\Gamma) \text{ such that } f_n \to f \text{ in } L^1(\Gamma)\}.$$

The fact that $H^1_{quad,\beta}(\Gamma) = H^1_{BZ\kappa,M\epsilon}(\Gamma)$ is then a straightforward consequence of (C.48) and the fact that the space $H^1_{BZ\kappa,M\epsilon}(\Gamma) \cap L^2(\Gamma)$ is dense in $H^1_{BZ\kappa,M\epsilon}(\Gamma)$. □

Proof: (Theorem C.1.38)

Let $M \in \mathbb{N} \cap (\frac{d_0}{4} - \frac{1}{2}, +\infty)$ and $\epsilon > 0$. Propositions C.4.3 and C.4.12 yield the continuous embeddings

$$H^1_{BZ2,M+\frac{1}{2},\epsilon}(T_\Gamma) \cap H^2(T_\Gamma) \subset E^1_{quad,\frac{1}{2}}(T_\Gamma) \subset H^1_{BZ2,M+\frac{1}{2},\epsilon}(T_\Gamma) \cap H^2(T_\Gamma),$$

from which we deduce the equality of the two spaces, with equivalent norms.

Since $\mathbb{H}^1_{BZ2,M+\frac{1}{2},\epsilon}(T_\Gamma)$ is dense in $H^1_{BZ2,M+\frac{1}{2},\epsilon}(T_\Gamma) \subset L^1(T_\Gamma)$ and is included in $H^1_{BZ2,M+\frac{1}{2},\epsilon}(T_\Gamma) \cap H^2(\Gamma)$, it follows that $H^1_{BZ2,M+\frac{1}{2},\epsilon}(T_\Gamma)$ is the completion in $L^1(T_\Gamma)$ of $H^1_{BZ2,M+\frac{1}{2},\epsilon}(T_\Gamma) \cap H^2(\Gamma)$ and thus also of $E^1_{quad,\frac{1}{2}}(T_\Gamma)$ with the same arguments than those used in the proof of Theorem C.1.36.

Moreover, notice that if $F \in H^2(T_\Gamma)$,

$$F \in E^1_{quad,\beta}(T_\Gamma) \Longleftrightarrow \Delta^{-\frac{1}{2}} d^* F \in E^1_{quad,\beta}(\Gamma).$$

Indeed, the implication $\Delta^{-\frac{1}{2}}d^*F \in E^1_{quad,\beta}(\Gamma) \Rightarrow F \in E^1_{quad,\beta}(T_\Gamma)$ is obvious, and the converse is due to Proposition C.1.32. As said in Theorem C.1.36, the spaces $E^1_{quad,\beta}(\Gamma)$ are all equivalent once $\beta > 0$;

and so are the spaces $E^1_{quad,\beta}(T_\Gamma)$. Consequently, for all $\beta > 0$, the completion of $E^1_{quad,\beta}(T_\Gamma)$ in $L^1(T_\Gamma)$ exists and is the same as the one of $E^1_{quad,\frac{1}{2}}(T_\Gamma)$. □

Proof: (Theorem C.1.39)

Just use Proposition C.4.2 instead of Proposition C.4.1 (in the proof of Theorem C.1.36), and Proposition C.4.4 instead of Proposition C.4.3 (in the proof of Theorem C.1.38). □

Let us state and prove now item $b)$ of Remark C.1.41. We first introduce $E^1_{BZ\kappa,M,\epsilon}(\Gamma)$ defined by

$$E^1_{BZ\kappa,M,\epsilon}(\Gamma) := \left\{ f \in L^2(\Gamma),\ \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j a_j \text{ is a molecular } (BZ_\kappa, M, \epsilon)\text{-representation of } f \right. \\ \left. \text{and the sum converges in } L^2(\Gamma) \right\}$$

and outfitted with the norm

$$\|f\|_{E^1_{BZ\kappa,M,\epsilon}} = \inf \left\{ \sum_{i\in\mathbb{N}} |\lambda_i|,\ \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j a_j \text{ is a molecular } (BZ_\kappa, M, \epsilon)\text{-representation of } f \right. \\ \left. \text{and the sum converges in } L^2(\Gamma) \right\}.$$

In the same way, we define $E^1_{BZ2,M+\frac{1}{2},\epsilon}(T_\Gamma)$ by

$$E^1_{BZ2,M+\frac{1}{2},\epsilon}(T_\Gamma) := \left\{ f \in H^2(T_\Gamma),\ \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j a_j \text{ is a mol. } (BZ_2, M + \frac{1}{2}, \epsilon)\text{-representation of } f \right. \\ \left. \text{and the sum converges in } L^2(T_\Gamma) \right\}$$

and we equipped it with the norm

$$\|f\|_{E^1_{BZ\kappa,M+\frac{1}{2},\epsilon}} = \inf \left\{ \sum_{i\in\mathbb{N}} |\lambda_i|,\ \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j a_j \text{ is a mol. } (BZ_2, M + \frac{1}{2}, \epsilon)\text{-representation of } f \right. \\ \left. \text{and the sum converges in } L^2(T_\Gamma) \right\}.$$

Corollary C.4.13. *Let* Γ *be a weighted graph satisfying* (DV) *and* (LB).

(i) If $\kappa \in \{1, 2\}$, $\epsilon \in (0, +\infty)$ *and* $M \in \mathbb{N}^* \cap (\frac{d_0}{4}, +\infty)$, *then*

$$E^1_{BZ\kappa,M,\epsilon}(\Gamma) = H^1_{BZ\kappa,M,\epsilon}(\Gamma) \cap L^2(\Gamma) = E^1_{quad,1}(\Gamma)$$

with equivalent norms. As a consequence, the completion of $E^1_{BZ\kappa,M,\epsilon}(\Gamma)$ *in* $L^1(\Gamma)$ *exists and is equal to* $H^1(\Gamma) = H^1_{BZ\kappa,M,\epsilon}(\Gamma)$.

(ii) If $\epsilon \in (0, +\infty)$ *and* $M \in \mathbb{N} \cap (\frac{d_0}{4} - \frac{1}{2}, +\infty)$, *then*

$$E^1_{BZ2,M+\frac{1}{2},\epsilon}(T_\Gamma) = H^1_{BZ2,M+\frac{1}{2},\epsilon}(T_\Gamma) \cap L^2(\Gamma) = E^1_{quad,\frac{1}{2}}(T_\Gamma)$$

with equivalent norms. As a consequence, the completion of $E^1_{BZ2,M,\epsilon}(T\Gamma)$ *in* $L^1(T_\Gamma)$ *exists and is equal to* $H^1(T_\Gamma) = H^1_{BZ2,M+\frac{1}{2},\epsilon}(T_\Gamma)$.

(iii) If the Markov kernel $p(x,y)$ *satisfies the pointwise Gaussian bound* (UE), *then* M *can be chosen arbitrarily in* $\mathbb{N}^*$ *in (i) and in* $\mathbb{N}$ *in (ii).*

Proof: The proof consists in noticing, as the proofs show, that the (BZ_κ, M, ϵ) (resp. $(BZ_2, M+\frac{1}{2}, \epsilon)$) representation of $f \in E^1_{quad,1}(\Gamma)$ (resp. $F \in E^1_{quad,\frac{1}{2}}(T_\Gamma)$) constructed in Proposition C.4.10 (resp. C.4.12) also converges in $L^2(\Gamma)$ (resp. $L^2(T_\Gamma)$).

Therefore, we proved in Propositions C.4.10 and C.4.12 that

$$E^1_{quad,1}(\Gamma) \subset E^1_{BZ\kappa,M,\epsilon}(\Gamma) \subset H^1_{BZ\kappa,M,\epsilon}(\Gamma) \cap L^2(\Gamma)$$

and

$$E^1_{quad,\frac{1}{2}}(T_\Gamma) \subset E^1_{BZ2,M+\frac{1}{2},\epsilon}(T_\Gamma) \subset H^1_{BZ2,M+\frac{1}{2},\epsilon}(T_\Gamma) \cap L^2(T_\Gamma).$$

We end then the proof as in Theorems C.1.36, C.1.38 and C.1.39. □

C.5 Appendix: A covering lemma

Lemma C.5.1. *Let B a ball of radius $r \in \mathbb{N}^*$ and $\alpha \geq 1$. There exists a collection of pairwise disjoint balls $(B_i)_{i \in \mathrm{l}_\alpha}$ of radius r such that*

$$\bigcup_{i \in I_\alpha} B_i \subset \alpha B \subset \bigcup_{i \in I_\alpha} 3B_i.$$

Proof: It is a classical fact and we provide a proof for completeness. Let B be a ball of radius r and of center x_0. Let $(B_i)_{i \in I_\alpha}$ be a set of disjoint balls included in αB and of radius r. Assume that $(B_i)_{i \in I_\alpha}$ is maximal, that is, for every ball B_0 of radius r, either B_0 is not included in αB, or there exist $i \in I_\alpha$ such that $B_0 \cap B_i \neq \emptyset$. Let us prove that

$$\alpha B \subset \bigcup_{i \in I_\alpha} 3B_i. \tag{C.49}$$

Let $x \in \alpha B$ and let us prove that the ball $B(x, 2r)$ intersects one of the B_i's. Assume the opposite. There exists a path $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x$ joining x_0 to x and of length $n = d(x, x_0) < \alpha r$. Then the balls $B(x_{\max\{0,n-r\}}, r)$ is included in $B(x, 2r)$ and in αB, that is the set $(B_i)_{i \in I_\alpha}$ is not maximal. By contradiction, there exists $i \in I_\alpha$ such that $B(x, 2r) \cap B_i \neq \emptyset$, that implies $x \in 3B_i$. □

Corollary C.5.2. *There exist $M \in \mathbb{N}$ and $C > 0$ such that for all balls B of radius r and all $j \geq 1$, there exists a covering $(B_i)_{i \in I_j}$ of $C_j(B)$ such that*

(i) each ball B_i is of radius r,

(ii) the covering is included in $\tilde{C}_j := C_{j-1}(B) \cup C_j(B) \cup C_{j+1}(B)$ (with the convention $C_0(B) = \emptyset$), that is

$$\bigcup_{i \in I_j} B_i \subset \tilde{C}_j$$

(iii) each point is covered by at most M balls B_i.

(iv) the number of balls $\# I_j$ is bounded by $C 2^{j(d_0+1)}$

Proof: Let B be a ball of radius r and $j \geq 1$. Notice that (iv) is a consequence of the three first points. Indeed,

$$\begin{aligned}
\# I_j &= \frac{1}{V(2^j B)} \sum_{i \in I_j} V(2^j B) \\
&\leq \frac{1}{V(2^j B)} \sum_{i \in I_j} V(2^{j+3} B_i) \\
&\lesssim \frac{2^{j(d_0+1)}}{V(2^j B)} \sum_{i \in I_j} V(B_i) \\
&\leq M 2^{j(d_0+1)} \frac{1}{V(2^j B)} V(2^{j+2} B) \\
&\lesssim 2^{j(d_0+1)}.
\end{aligned}$$

where the second line is a consequence of (i) and (ii), the third one holds thanks to Proposition C.1.5, and the forth one is due to (ii) and (iii).

Let us now prove the first three conclusions of the corollary.

Assume that $r \in \{1,2\}$. Then the collection of balls $(B(x,r))_{x\in C_j(B)}$ satisfies (i), (ii) and (iii). Indeed, only (iii) for $r=2$ is not obvious, but is a consequence of the uniform local finiteness of Γ.

Assume now that $r \geq 3$. Let $s \in \left[\frac{r}{5}, \frac{r}{3}\right] \cap \mathbb{N}$. By Lemma C.5.1 (with $\alpha = 2^{j+1}\frac{s}{r}$), there exists a collection $(\tilde{B}_i)_{i\in I_\alpha}$ of balls of radius s such that

$$\bigcup_{i\in I_\alpha} \tilde{B}_i \subset 2^{j+1}B \subset \bigcup_{i\in I_\alpha} 3\tilde{B}_i.$$

We set

$$I_j = \{i \in I_\alpha,\ 3\tilde{B}_i \cap C_j(B) \neq \emptyset\}$$

and then $B_i = \frac{r}{s}\tilde{B}_i$. Let us check that the collection of balls $(B_i)_{i\in I_j}$ satisfies the conclusions of the corollary. (i) is a consequence of the construction. (ii) is true since

$$\bigcup_{i\in I_j} B_i \subset \{x \in \Gamma,\ d(x, C_j(B)) < 2s\}.$$

For the point (iii), define for $x \in \Gamma$,

$$I_x = \{i \in I_j, B(x,s) \cap B_i \neq \emptyset\}.$$

Since all $\tilde{B}_i$ are disjoints, one has then

$$\sum_{i\in I_x} V(\tilde{B}_i) \leq V(x, r+s) \leq V(x, 6s).$$

However, notice that $B(x,6s) \subset V(12\tilde{B}_i)$ for all $i \in I_x$. Hence, with the doubling property,

$$V(x,6s) \gtrsim \sum_{i\in I_x} V(12\tilde{B}_i) \gtrsim \sum_{i\in I_x} V(x,6s)$$

and therefore, $\# I_x \lesssim 1$. □

C.6 Appendix: Exponential decay of some functions

Lemma C.6.1. *For all $m \in [0,+\infty)$, there exists $C_m, c > 0$ such that for all $t \geq 0$ and $k \in \mathbb{N}$, one has*

$$\left(\frac{1+k}{1+t}\right)^m \left(\frac{t}{1+t}\right)^k \leq C_m \exp\left(-c\frac{k}{1+t}\right).$$

Proof: First check that the function

$$\varphi(t) \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \left(1 - \frac{1}{1+t}\right)^{1+t}$$

satisfies $0 < \varphi(t) < 1$ for all $t > 0$ and $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = e^{-1} < 1$. Then there exists $c > 0$ such that $\varphi(t) \in (0, e^{-c})$ for all $t > 0$. From here, one has

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1+k}{1+t}\right)^m \left(\frac{t}{1+t}\right)^k &\leq \left(1+\frac{k}{1+t}\right)^m \left(\frac{t}{1+t}\right)^k \\
&= \left(1+\frac{k}{1+t}\right)^m \exp\left(\frac{k}{1+t}\ln\varphi(t)\right) \\
&\leq \left(1+\frac{k}{1+t}\right)^m \exp\left(-c\frac{k}{1+t}\right) \\
&\leq C_m \exp\left(-\frac{c}{2}\frac{k}{1+t}\right).
\end{aligned}$$

□

Appendix D

Riesz transform on graphs under subgaussian estimates

D.1 Introduction and statement of the results

Let $d \in \mathbb{N}^*$. In the Euclidean case $\mathbb{R}^d$, the Riesz transforms are the linear operators $\partial_j(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}$. A way to define them is to use the Fourier transform $\mathcal{F}$: for all $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ and all $\xi \in \mathbb{R}^d$, one has

$$\mathcal{F}(\partial_j(-\Delta)^{-\frac{1}{2}} f)(\xi) = i\frac{\xi_j}{|\xi|}\mathcal{F}(f)(\xi).$$

The Riesz transforms have a convolution kernel, that is $\partial_j(-\Delta)^{-\frac{1}{2}} f = k_j * f$ where $k_j = c_d \frac{x_j}{|x|^{d+1}}$ is a tempered distribution. A remarkable property of the Riesz transform is that they are L^p bounded for all $p \in (1, +\infty)$ (see [Ste70a, Chapter 2, Theorem 1]).

This result have been extended to other settings. Let M be a complete Riemannian manifold, with ∇ the Riemannian gradient and Δ the Beltrami Laplace operator. Assume M is doubling. Under pointwise Gaussian upper estimate of the heat kernel h_t, the Riesz transform $\nabla\Delta^{-\frac{1}{2}}$ is bounded on $L^p(M)$ for all $p \in (1, 2]$ (see [CD99]). When $p > 2$, the L^p boundedness of the Riesz transform holds under much stronger condition, expressed in term of Poincaré inequalities on balls and of the domination of the gradient of the semigroup in L^q for some $q > p$ (with L^2 Poincaré inequality, see [CD03]; with L^q Poincaré inequality, see [BCF14]). Similar results were established in the case of graphs (see [Rus00] when $p < 2$, see [BR09] when $p > 2$).

We are interested now by the limit case $p = 1$. It appears than the Hardy space H^1 is the proper substitute of L^1 when Riesz transforms are involved. In the Euclidean case, $H^1(\mathbb{R}^d)$ can be defined as the space of functions $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ such that $\partial_j(-\Delta)^{-\frac{1}{2}} f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ for all $j \in [\![1, d]\!]$ (see [FS72]). Moreover, the Riesz transforms $\partial_j(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}$, that are bounded from $H^1(\mathbb{R}^d)$ to $L^1(\mathbb{R}^d)$, are actually bounded on $H^1(\mathbb{R}^d)$.

This last result, namely the H^1 boundedness of the Riesz transform, have been extended to complete Riemannian manifolds in [AMR08] (completed in [AMM]), under the only assumption that the space is doubling. In order to do this, Auscher, Mc Intosh and Russ introduced for functions and forms some Hardy spaces defined by using the Laplacian. In [AMR08], when M is a (complete doubling) Riemannian manifold, the authors deduced then a $H^p(M)$ boundedness of the Riesz transform for $p \in (1, 2)$, where the spaces H^p are defined by means of quadratic functionals. Under pointwise Gaussian upper estimates $H^p(M) = L^p(M)$ and thus they recover $L^p(M)$ boundedness of the Riesz transform obtained in [CD99].

The problem was also considered on graphs Γ. In the same spirit as [AMR08], the present author established in [Fen14] the $H^1 = H^1_w(\Gamma)$-boundedness of the Riesz transform. In the present paper, we will assume some pointwise subgaussian upper estimates on the Markov kernel. Under this assumption, we define a new Hardy space $H^1_s(\Gamma)$ which $H^1_w(\Gamma)$ is continuously embedded in. Note that $H^1_w(\Gamma) = H^1_s(\Gamma)$ if we assume some pointwise Gaussian estimates on the Markov kernel. We prove again the $H^1 = H^1_s(\Gamma)$ boundedness of the Riesz transform on graphs. However, those new Hardy spaces $H^1_s(\Gamma)$ satisfy an interpolation property that make us able to get the $L^p(\Gamma)$ boundedness of the Riesz transform on graphs. Hence, for $p \in (1, 2)$, we extend the $L^p(\Gamma)$ boundedness of the Riesz transform to a larger class of graphs than the one considered in [Rus00].

In the context of Riemannian manifolds and graphs, under pointwise subgaussian estimates of the heat (or Markov) kernel, quasi-Riesz transforms and Hardy spaces have been studied by Chen in [Che14]. We make a comparison in subsection D.1.5

D.1.1 The discrete setting

Let Γ be an infinite set and $\mu_{xy} = \mu_{yx} \geq 0$ a symmetric weight on $\Gamma \times \Gamma$. The couple (Γ, μ) induces a (weighted unoriented) graph structure if we define the set of edges by

$$E = \{(x,y) \in \Gamma \times \Gamma, \ \mu_{xy} > 0\}.$$

We call then x and y neighbors (or $x \sim y$) if and only if $(x,y) \in E$.
We will assume that the graph is locally uniformly finite, that is there exists $M_0 \in \mathbb{N}$ such that for all $x \in \Gamma$,

$$\#\{y \in \Gamma, \ y \sim x\} \leq M_0. \tag{D.1}$$

In other words, the number of neighbors of a vertex is uniformly bounded.
We define the weight $m(x)$ of a vertex $x \in \Gamma$ by $m(x) = \sum_{x \sim y} \mu_{xy}$.

More generally, the volume (or measure) of a subset $E \subset \Gamma$ is defined as $m(E) := \sum_{x \in E} m(x)$.
We define now the $L^p(\Gamma)$ spaces. For all $1 \leq p < +\infty$, we say that a function f on Γ belongs to $L^p(\Gamma, m)$ (or $L^p(\Gamma)$) if

$$\|f\|_p := \left(\sum_{x \in \Gamma} |f(x)|^p m(x) \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty,$$

while $L^\infty(\Gamma)$ is the space of functions satisfying

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in \Gamma} |f(x)| < +\infty.$$

Let us define for all $x, y \in \Gamma$ the discrete-time reversible Markov kernel p associated with the measure m by $p(x,y) = \frac{\mu_{xy}}{m(x)m(y)}$. The discrete kernel $p_k(x,y)$ is then defined recursively for all $k \geq 0$ by

$$\begin{cases} p_0(x,y) = \frac{\delta(x,y)}{m(y)} \\ p_{k+1}(x,y) = \sum_{z \in \Gamma} p(x,z) p_k(z,y) m(z). \end{cases} \tag{D.2}$$

Notice that for all $k \geq 1$, we have

$$\|p_k(x,.)\|_{L^1(\Gamma)} = \sum_{y \in \Gamma} p_k(x,y) m(y) = \sum_{d(x,y) \leq l} p_k(x,y) m(y) = 1 \qquad \forall x \in \Gamma, \tag{D.3}$$

and that the kernel is symmetric:

$$p_k(x,y) = p_k(y,x) \qquad \forall x, y \in \Gamma. \tag{D.4}$$

For all functions f on Γ, we define P as the operator with kernel p, i.e.

$$Pf(x) = \sum_{y \in \Gamma} p(x,y) f(y) m(y) \qquad \forall x \in \Gamma. \tag{D.5}$$

It is easily checked that P^k is the operator with kernel p_k.

Since $p(x,y) \geq 0$ and (D.3) holds, one has, for all $p \in [1, +\infty]$,

$$\|P\|_{p \to p} \leq 1. \tag{D.6}$$

Remark D.1.1. *Let $1 \leq p < +\infty$. Since, for all $k \geq 0$, $\left\|P^k\right\|_{p \to p} \leq 1$, the operators $(I-P)^\beta$ and $(I+P)^\beta$ are L^p-bounded for all $\beta \geq 0$ (see [CSC90]).*

We define a nonnegative Laplacian on Γ by $\Delta = I - P$. One has then

$$\begin{aligned}\langle \Delta f, f\rangle_{L^2(\Gamma)} &= \sum_{x,y\in\Gamma} p(x,y)(f(x)-f(y))f(x)m(x)m(y)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{x,y\in\Gamma} p(x,y)|f(x)-f(y)|^2 m(x)m(y),\end{aligned} \tag{D.7}$$

where we use (D.3) for the first equality and (D.4) for the second one. The last calculus proves that the following operator

$$\nabla f(x) = \left(\frac{1}{2}\sum_{y\in\Gamma} p(x,y)|f(y)-f(x)|^2 m(y)\right)^{\frac{1}{2}},$$

called "length of the gradient" (and the definition of which is taken from [CG98]), satisfies

$$\|\nabla f\|^2_{L^2(\Gamma)} =< \Delta f, f >_{L^2(\Gamma)} = \|\Delta^{\frac{1}{2}} f\|^2_{L^2(\Gamma)}. \tag{D.8}$$

We recall now definitions of 1-forms on graphs and their first properties (based on [Fen14]). We define, for all $x \in \Gamma$, the set $T_x = \{(x,y) \in \Gamma^2,\ y \sim x\}$ and for all set $E \subset \Gamma$,

$$T_E = \bigcup_{x\in E} T_x = \{(x,y) \in E \times \Gamma,\ y \sim x\}.$$

Definition D.1.2. *If $x \in \Gamma$, we define, for all functions F_x defined on T_x the norm*

$$|F_x|_{T_x} = \left(\frac{1}{2}\sum_{y\sim x} p(x,y)m(y)|F_x(x,y)|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Moreover, a function $F : T_\Gamma \to \mathbb{R}$ belongs to $L^p(T_\Gamma)$ if

(i) F is antisymmetric, that is $F(x,y) = -F(y,x)$ for all $x \sim y$,

(ii) $\|F\|_{L^p(T_\Gamma)} := \|x \mapsto |F(x,.)|_{T_x}\|_{L^p(\Gamma)} < +\infty$.

The Hilbert space $L^2(T_\Gamma)$ is outfitted with the inner product $\langle\cdot,\cdot\rangle$ defined as

$$\langle F, G\rangle = \frac{1}{2}\sum_{x,y\in\Gamma} p(x,y)F(x,y)G(x,y)m(x)m(y).$$

Definition D.1.3. *Let f a function on Γ and F an antisymmetric function on T_Γ. Define the operators d and d^* by*

$$df(x,y) := f(x) - f(y) \qquad \forall (x,y) \in T_\Gamma$$

and

$$d^*F(x) := \sum_{y\sim x} p(x,y)F(x,y)m(y) \qquad \forall x \in \Gamma.$$

Remark D.1.4. *It is plain to see that $d^*d = \Delta$ and $|df(x,.)|_{T_x} = \nabla f(x)$.*
As the notation d^* suggests, d^* is the adjoint of d, that is for all $f \in L^2(\Gamma)$ and $G \in L^2(T_\Gamma)$,

$$\langle df, G\rangle_{L^2(T_\Gamma)} = \langle f, d^*G\rangle_{L^2(\Gamma)}. \tag{D.9}$$

The proof of this fact can be found in [BR09, Section 8.1].

We introduce a subspace of $L^2(T_\Gamma)$, called $H^2(T_\Gamma)$, defined as the closure in $L^2(T_\Gamma)$ of

$$E^2(T_\Gamma) := \{F \in L^2(T_\Gamma),\ \exists f \in L^2(\Gamma) :\ F = df\}.$$

Notice that $d\Delta^{-1}d^* = Id_{E^2(T_\Gamma)}$ (see [Fen14]). The functional $d\Delta^{-1}d^*$ can be extended to a bounded operator on $H^2(T_\Gamma)$ and

$$d\Delta^{-1}d^* = Id_{H^2(T_\Gamma)}. \tag{D.10}$$

Let us recall Proposition 1.32 in [Fen14] .

Proposition D.1.5. *For all $p \in [1,+\infty]$, the operator d^* is bounded from $L^p(T_\Gamma)$ to $L^p(\Gamma)$.*
The operator $d\Delta^{-\frac{1}{2}}$ is an isometry from $L^2(\Gamma)$ to $H^2(T_\Gamma)$, and the operator $\Delta^{-\frac{1}{2}}d^*$ is an isometry from $H^2(T_\Gamma)$ to $L^2(\Gamma)$.

D.1.2 Assumptions on the graph

Definition D.1.6. *We say that* (Γ, μ) *satisfies* (LB) *if there exists* $\epsilon = \epsilon_{LB} > 0$ *such that*

$$\frac{\mu_{xx}}{m(x)} = p(x,x)m(x) \geq \epsilon \qquad \forall x \in \Gamma. \tag{LB}$$

Let us recall a result in [CSC90].

Lemma D.1.7. *The condition* (LB) *implies that* -1 *does not belong to the* L^2*-spectrum of* P*, which implies in turn the analyticity of* P *in* $L^p(\Gamma)$*,* $1 < p < +\infty$*. Namely,*

$$\|(I-P)P^n\|_{p \to p} \lesssim \frac{1}{n}.$$

We will need some assumptions that depends of the metric.

Definition D.1.8. *Let* X *be a nonempty set and* $\rho : X \to [0, +\infty)$*. Say that* ρ *is a quasidistance if, and only if there exists* $C > 0$ *such that, for all* $x, y, z \in X$*:*

(i) $\rho(x,y) = 0$ *if, and only if,* $x = y$*,*

(ii) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$*,*

(iii) we have the inequality

$$\rho(x,y) \leq C\left(\rho(x,z) + \rho(z,y)\right). \tag{D.11}$$

Throughout all the paper, whenever ρ *is a quasidistance on a graph* Γ*, we will assume that* ρ *take values in* $\mathbb{N}$ *and that* $\rho(x,y) = 1$ *if* $x \sim y$ *with* $x \neq y$*.*

Definition D.1.9. *Let* ρ *be a quasidistance on* Γ*.*

(i) Define C_ρ *as the infimum of the constants* $C > 0$ *such that* (D.11) *holds. Note that* (D.11) *is satisfied with* C_ρ*.*

(ii) For $x \in \Gamma$ *and* $k \in \mathbb{R}_+^*$*, the ball* $B(x,k)$ *(or* $B_\rho(x,k)$*) is defined by*

$$B(x,k) = \{y \in \Gamma,\ \rho(x,y) < k\}.$$

Conversely, B *is a ball (for* ρ*) if there exists* $(x_B, k_B) \in \Gamma \times \mathbb{N}^*$ *such that* $B = B(x_B, k_B)$*. The radius of* B *is defined as* $\sup\{\rho(y, B^c),\ y \in B\}$*. Note that the radius* r *of the ball* $B(x,k)$ *satisfies* $k \leq r \leq 2C_\rho k$*.*

(iii) If $j \geq 1$*,* $C_j(x,k)$ *denotes the annulus* $B(x, C_\rho 2^{j+1}k) \backslash B(x, C_\rho 2^j k)$*. Moreover,* $C_0(x,k)$ *denotes* $B(x, 2C_\rho k)$

(iv) We will use the notation $V_\rho(x,k)$ *or only* $V(x,k)$ *for* $m(B(x,k))$*.*

Definition D.1.10. *Let* ρ *be a quasidistance. We say that* (Γ, μ, ρ) *satisfies* (DV) *if the measure* m *is doubling with respect to the quasidistance* ρ*, that is if there exists* $C_{dv} > 0$ *such that*

$$V(x, 2k) \leq C_{dv} V(x,k) \qquad \forall x \in \Gamma,\ \forall k \in \mathbb{R}_+^*; \tag{DV}$$

Proposition D.1.11. *Let* (Γ, μ, ρ) *satisfying* (DV)*. Then there exists* $d > 0$ *such that*

$$V(x, \lambda r) \lesssim \lambda^d V(x,r) \qquad \forall x \in \Gamma,\ r > 0 \text{ and } \lambda \geq 1. \tag{D.12}$$

Definition D.1.12. *Let* ρ *be a quasidistance. We say that* (Γ, μ, ρ) *satisfies* (UE) *if there exist three constants* $c_{ue}, C_{ue} > 0$ *and* $\eta \in (0,1]$ *such that* p_k *satisfies the subgaussian estimates*

$$p_{k-1}(x,y) \lesssim \frac{C_{ue}}{V(x,k)} \exp\left[-c_{ue}\left(\frac{\rho(x,y)}{k}\right)^\eta\right], \forall x,y \in \Gamma,\ \forall k \in \mathbb{N}^*. \tag{UE}$$

Remark D.1.13. *Notice that when* $\rho = d^2$*, assumption* (UE) *is the pointwise Gaussian upper estimate of the Markov kernel. It corresponds then to the estimate (on the Markov kernel) made in [Rus00] or [Fen15b]. In particular, when* $\rho = d^2$*, assumption* (UE) *is satisfied when* Γ *is the Cayley graph of finitely generated groups. Other graphs satisfying* (UE) *are presented in section D.5.*

D.1.3 Definition of Hardy spaces

We define two kinds of Hardy spaces. The first one is defined using molecules.

Definition D.1.14. *Let $M \in \mathbb{N}^*$, $p \in (1,\infty]$ and $\epsilon \in (0,+\infty)$. A function $a \in L^p(\Gamma)$ is called a (M,p,ϵ)-molecule if there exist $x \in \Gamma$, $s \in \mathbb{R}_+^*$ and a function $b \in L^p(\Gamma)$ such that*

(i) $a = [I-(I+s\Delta)^{-1}]^M b$,

(ii) $\|b\|_{L^p(C_j(x,s))} \leq 2^{-j\epsilon} V(x,2^j s)^{\frac{1}{p}-1}$, $\forall j \geq 0$.

We say that an (M,p,ϵ)-molecule a is associated with a vertex x and a real s when we want to refer to x and s given by the definition.

Definition D.1.15. *Let $M \in \mathbb{N}^*$, $p \in (1,\infty]$ and $\epsilon \in (0,+\infty)$. A function $a \in L^p(T_\Gamma)$ is called an $(M-\frac{1}{2},p,\epsilon)$-molecule if there exist $x \in \Gamma$, $s \in \mathbb{R}_+^*$ and a function $b \in L^p(\Gamma)$ such that*

(i) $a = s^{M-\frac{1}{2}} d\Delta^{M-1}(I+s\Delta)^{-M+\frac{1}{2}} b$;

(ii) $\|b\|_{L^p(C_j(x,s))} \leq 2^{-j\epsilon} V(x,2^j s)^{\frac{1}{p}-1}$ *for all* $j \geq 0$.

Remark D.1.16. *In the particular case $p=2$, these definitions of molecules can be found in [Fen14].*

Remark D.1.17. *As will be seen in Propositions D.2.6 and D.2.9 below, when a is a molecule occurring in Definition D.1.14 or in Definition D.1.15, one has $\|a\|_{L^1} \lesssim 1$.*

Definition D.1.18. *Let $M \in \mathbb{N}^*$, $p \in (1,\infty]$ and $\epsilon \in (0,+\infty)$. We say that a function f on Γ belongs to $H^1_{mol,M,p,\epsilon}(\Gamma)$ if f admits a molecular (M,p,ϵ)-representation, that is if there exist a sequence $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell^1$ and a sequence $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ of (M,p,ϵ)-molecules such that*

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i a_i \tag{D.13}$$

where the convergence of the series to f holds pointwise. Define, for all $f \in H^1_{mol,M,p,\epsilon}(\Gamma)$,

$$\|f\|_{H^1_{mol,M,p,\epsilon}} = \inf\left\{ \sum_{j=0}^{\infty} |\lambda_j|,\ \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j a_j,\ \textit{is a molecular } (M,p,\epsilon)\textit{-representation of } f \right\}.$$

Definition D.1.19. *Let $M \in \mathbb{N}^*$, $p \in (1,\infty]$ and $\epsilon \in (0,+\infty)$. We say that a function f on T_Γ belongs to $H^1_{mol,M-\frac{1}{2},p,\epsilon}(T_\Gamma)$ if f admits a molecular $(M-\frac{1}{2},p,\epsilon)$-representation, that is if there exist a sequence $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell^1$ and a sequence $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ of $(M-\frac{1}{2},p,\epsilon)$-molecules such that*

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i a_i \tag{D.14}$$

where the convergence of the series to f holds pointwise. Define, for all $f \in H^1_{mol,M-\frac{1}{2},p,\epsilon}(T_\Gamma)$,

$$\|f\|_{H^1_{mol,M-\frac{1}{2},p,\epsilon}} = \inf\left\{ \sum_{j=0}^{\infty} |\lambda_j|,\ \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j a_j,\ \textit{is a molecular } (M-\frac{1}{2},p,\epsilon)\textit{-representation of } f \right\}.$$

Proposition D.1.20. *Let $M \in \mathbb{N}^*$, $p \in (1,\infty]$ and $\epsilon \in (0,+\infty)$. Then:*

(i) the map $f \mapsto \|f\|_{H^1_{mol,M,p,\epsilon}}$ (resp. $f \mapsto \|f\|_{H^1_{mol,M-\frac{1}{2},p,\epsilon}}$) is a norm on the space $H^1_{mol,M,p,\epsilon}$ (resp. $H^1_{mol,M-\frac{1}{2},p,\epsilon}$),

(ii) the space $H^1_{mol,M,p,\epsilon}(\Gamma)$ (resp. $H^1_{mol,M-\frac{1}{2},p,\epsilon}(T_\Gamma)$) is complete and continuously embedded in $L^1(\Gamma)$ (resp. $L^1(T_\Gamma)$).

Proof: Remark D.1.17 shows that, if f is in H^1_{mol} the series (D.13) (or (D.14)) converges in L^1, and therefore converges to f in L^1. This yields (i) and the embeddings in (ii). Moreover, a normed linear vector space X is complete if and only if it has the property

$$\sum_{j=0}^{\infty} \|f_j\|_X < +\infty \Longrightarrow \sum_{j=0}^{\infty} f_j \text{ converges in } X.$$

Using this criterion, the completeness of the Hardy spaces under consideration is a straightforward consequence of the fact that $\|a\|_{L^1} \lesssim 1$ whenever a is a molecule. See also the argument for the completeness of H^1_L in [HM09], p. 48. □

The second kind of Hardy spaces is defined via quadratic functionals.

Definition D.1.21. *Define, for $\beta > 0$, the quadratic functional L_β on $L^2(\Gamma)$ by*

$$L_\beta f(x) = \left(\sum_{(y,k)\in\gamma(x)} \frac{k^{2\beta-1}}{V(x,k)} |\Delta^\beta P^{k-1} f(y)|^2 m(y) \right)^{\frac{1}{2}}$$

where $\gamma(x) = \{(y,k) \in \Gamma \times \mathbb{N}^*,\ \rho(x,y) < k\}$.

Definition D.1.22. *The space $E^1_{quad,\beta}(\Gamma)$ is defined for all $\beta > 0$ by*

$$E^1_{quad,\beta}(\Gamma) := \left\{ f \in L^2(\Gamma),\ \|L_\beta f\|_{L^1} < +\infty \right\}.$$

It is outfitted with the norm

$$\|f\|_{H^1_{quad,\beta}} := \|L_\beta f\|_{L^1}.$$

The space $E^1_{quad,\beta}(T_\Gamma)$ is defined from $E^1_{quad,\beta}$ as

$$E^1_{quad,\beta}(T_\Gamma) := \left\{ f \in E^2(T_\Gamma),\ \Delta^{-\frac{1}{2}} d^* f \in E^1_{quad,\beta}(\Gamma) \right\}.$$

It is outfitted with the norm

$$\|f\|_{H^1_{quad,\beta}} := \|L_\beta \Delta^{-\frac{1}{2}} d^* f\|_{L^1}.$$

Remark D.1.23. *The fact that the map $f \mapsto \|f\|_{H^1_{quad,\beta}}$ is a norm is proven in Remark C.1.20.*

D.1.4 Main results

In all the following statements, let (Γ, μ, ρ) be a weighted graph outfitted with a quasidistance and satisfying (LB), (DV) and (UE).

Definition D.1.24. *Let $(E, \|.\|_E)$ a normed vector space and $(G, \|.\|_F)$ a Banach space such that $E \subset F$. A Banach space $(F, \|.\|_F)$ is the completion of E in G if*

(i) we have the continuous embeddings

$$E \subset F \subset G$$

,

(ii) the set E is dense in F,

(iii) for all $e \in E$, $\|e\|_E = \|e\|_F$.

Remark D.1.25. *The completion F of E always exists. However, F is defined in an abstract space. Even if E is continuously embedding in a Banach G, F cannot always be identified to a subspace of G.*

Theorem D.1.26. *Let $\beta > 0$. The completion $H^1_{quad,\beta}(\Gamma)$ of $E^1_{quad,\beta}(\Gamma)$ in $L^1(\Gamma)$ exists. Moreover, if $M \in N^*$, $p \in (1,2]$ and $\epsilon \in (0,+\infty)$, then the spaces $H^1_{mol,M,p,\epsilon}(\Gamma)$ and $H^1_{quad,\beta}(\Gamma)$ coincide. More precisely, we have*

$$E^1_{quad,\beta}(\Gamma) = H^1_{mol,M,p,\epsilon}(\Gamma) \cap L^2(\Gamma).$$

Once the equality $H^1_{mol,M,p,\epsilon}(\Gamma) = H^1_{quad,\beta}(\Gamma)$ is established, this space will be denoted by $H^1(\Gamma)$.

Theorem D.1.27. *Let $\beta > 0$. The completion $H^1_{quad,\beta}(T_\Gamma)$ of $E^1_{quad,\beta}(T_\Gamma)$ in $L^1(T_\Gamma)$ exists. Moreover, if $M \in \mathbb{N}^*$, $p \in (1,2]$ and $\epsilon \in (0,+\infty)$, then the spaces $H^1_{mol,M-\frac{1}{2},p,\epsilon}(T_\Gamma)$ and $H^1_{quad,\beta}(T_\Gamma)$ coincide. More precisely, we have*

$$E^1_{quad,\beta}(T_\Gamma) = H^1_{mol,M-\frac{1}{2},p,\epsilon}(T_\Gamma) \cap L^2(T_\Gamma).$$

Again, the space $H^1_{mol,M-\frac{1}{2},p,\epsilon}(T_\Gamma) = H^1_{quad,\beta}(T_\Gamma)$ will be denoted by $H^1(T_\Gamma)$.

Remark D.1.28. *Note that the previous theorem provides that $H^1_{mol,M,p,\epsilon}(\Gamma)$ (resp. $H^1_{mol,M-\frac{1}{2},p,\epsilon}(T_\Gamma)$) is independent of $M \in \mathbb{N}^*$, $\epsilon \in (0,+\infty)$ and $p \in (1,2]$.*

Theorem D.1.29. *If T is linear operator acting on $L^2(\Gamma)$ such that*

1. *T is $L^2(\Gamma)$ bounded, that is there exists $C_2 > 0$ such that*

$$\|Tf\|_{L^2} \leq C_2 \|f\|_{L^2} \qquad \forall f \in L^2(\Gamma),$$

2. *T is bounded from $H^1(\Gamma)$ to $L^1(\Gamma)$, that is there exists $C_1 > 0$ such that*

$$\|Tf\|_{L^2} \leq C_1 \|f\|_{L^2} \qquad \forall f \in H^1(\Gamma) \cap L^2(\Gamma).$$

Then for all $p \in (1,2]$,

$$\|Tf\|_p \leq C_2^\theta C_1^{1-\theta} \|f\|_p \qquad \forall f \in L^p(\Gamma) \cap L^2(\Gamma)$$

where θ is given by

$$\frac{1}{p} = \frac{\theta}{2} + \frac{1-\theta}{1}.$$

Corollary D.1.30. *The Riesz transform $d\Delta^{-\frac{1}{2}}$ is bounded from $H^1(\Gamma)$ to $H^1(T_\Gamma)$. As a consequence the Riesz transform $\nabla\Delta^{-\frac{1}{2}}$ is bounded from $H^1(\Gamma)$ to $L^1(\Gamma)$, and thus is L^p-bounded for all $p \in (1,2]$.*

Proof: Theorems D.1.26 and D.1.27 yields,

$$\|d\Delta^{-\frac{1}{2}} f\|_{H^1(T_\Gamma)} \simeq \|d\Delta^{-\frac{1}{2}} f\|_{H^1_{quad,1}(T_\Gamma)} = \|\Delta^{-\frac{1}{2}} d^* d\Delta^{-\frac{1}{2}} f\|_{H^1_{quad,1}(\Gamma)} = \|f\|_{H^1_{quad,1}(\Gamma)} \simeq \|f\|_{H^1(\Gamma)}.$$

Therefore, $d\Delta^{-\frac{1}{2}}$ is H^1-bounded. Moreover, by Proposition D.1.20,

$$\|\nabla\Delta^{-\frac{1}{2}} f\|_{L^1(\Gamma)} = \|d\Delta^{-\frac{1}{2}} f\|_{L^1(T_\Gamma)} \lesssim \|d\Delta^{-\frac{1}{2}} f\|_{H^1(T_\Gamma)} \lesssim \|f\|_{H^1(\Gamma)}. \tag{D.15}$$

Define now for any function ϕ on T_Γ the linear operator

$$\nabla_\phi f(x) = \sum_{y \in \Gamma} p(x,y) df(x,y) \phi(x,y) m(y).$$

Then the boundedness (D.15) yields the estimate

$$\|\nabla_\phi f\|_{L^1} \lesssim \|f\|_{H^1} \sup_{x \in \Gamma} |\phi(x,.)|_{T_x}.$$

Moreover, since $\|\nabla\Delta^{-\frac{1}{2}} f\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$ (cf (D.8)), one has

$$\|\nabla_\phi f\|_{L^2} \lesssim \|f\|_{L^2} \sup_{x \in \Gamma} |\phi(x,.)|_{T_x}.$$

Define now $\phi_f(x,y) = \dfrac{df(x,y)}{\nabla f(x)}$. Note that $\sup_{x \in \Gamma} |\phi_f(x,.)|_{T_x} = 1$. With Theorem D.1.29, one has then

$$\|\nabla\Delta^{-\frac{1}{2}} f\|_{L^p} = \|\nabla_{\phi_f} \Delta^{-\frac{1}{2}} f\|_{L^p} \lesssim \|f\|_{L^p}$$

□

D.1.5 Comparison with previous results

For all $x, y \in \Gamma$, let $d(x,y)$ be length of the shortest path linking x to y, where $x_0, \dots, x_n$ is a path of length n if for any $i \in [\![1,n]\!]$, $x_{i-1} \simeq x_i$.

Russ established in [Rus00] the following result:

Theorem D.1.31. *Let* (Γ, μ, d^2) *satisfying* (LB)*,* (DV) *and* (UE)*.*
Then the Riesz transform is of weak type $(1,1)$*, that is*

$$\sup_{\lambda>0} \lambda m(\{\nabla \Delta^{-\frac{1}{2}} f > \lambda\}) \lesssim \|f\|_{L^1} \qquad \forall f \in L^1(\Gamma)$$

and of strong type (p,p) *(or* L^p *bounded) for all* $p \in (1,2]$*.*

In the present paper, as in [Rus00], we established the L^p boundedness of the Riesz transform for $p \in (1,2]$. However, the class of graphs that satisfies our assumptions (Corollary D.1.30) is strictly bigger than the one satisfying the assumptions of Theorem D.1.31. Indeed, fractal-type graphs (see Section D.5) such as the Sierpinski carpet fit into our theory but not into the one of [Rus00]. Contrary to [Rus00], we do not prove the weak type $(1,1)$ of the Riesz transform. It was replaced in the present paper by a $H^1(\Gamma)$ boundedness of the Riesz transform.

In [Che14], Chen stated

Theorem D.1.32. *Let* (Γ, μ) *be a graph satisfying* (LB) *and the local doubling property*

$$m(x) \simeq m(y) \qquad \forall x \sim y.$$

Then, for all $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$*, the quasi-Riesz transforms* $\nabla \Delta^{-\alpha}$ *are* L^p *bounded for all* $\in (1,2)$*.*
Let $\beta > 0$ *such that* (Γ, μ, d^β) *satisfy* (LB)*,* (DV) *and* (UE)*. Then, for all* $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$*, the quasi-Riesz transforms* $\nabla \Delta^{-\alpha}$ *is of weak type* $(1,1)$*, and thus of strong type* (p,p) *for all* $p \in (1,2]$*.*

Notice that the L^p boundedness of the Riesz transform $\nabla \Delta^{-\frac{1}{2}}$ implies the L^p boundedness of all quasi-Riesz transforms $\nabla \Delta^{-\frac{1}{2}}$, $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$. Therefore, Corollary D.1.30 and Theorem D.1.32 have a non-empty intersection. Chen proved more general results than us on quasi-Riesz transforms while we succeeded, under subgaussian estimates, to prove the boundedness of the "complete" Riesz transform.

In the context of complete Riemannian manifolds M with the doubling property, Chen also introduced in [Che14] some results on Hardy spaces "adapted" to some elliptic operators satisfying pointwise subgaussian estimates. She proved $H^1_{L,s}(M) := H^1_{L,mol}(M) = H^1_{L,quad}(M)$, i.e. we can define a Hardy space $H^1_{L,s}(M)$ that have two equivalent characterizations. The first one, $H^1_{L,mol}(M)$ is the space of functions in L^1 that have a molecular decomposition while $H^1_{L,quad}(M)$ is defined by using quadratic functionals of Lusin type. The space $H^1_{\Delta,s}(M)$ is bigger than the one introduced in [AMR08] and, for $p \in (1,2)$, the "interpolated" spaces $H^p_{\Delta,s}(M)$ are equal to $L^p(M)$.

The main difference between the present paper and [Che14] is that Chen did not make the same work on graphs and for 1-forms. Working on graphs brings some difficulties that do not appear, for examples, on Riemannian manifolds. Moreover, the present work extends also the notion of subgaussian estimates met in [Che14]. Besides, by considering all the functionals L_β for $\beta > 0$, we have a difficulty that was not considered in [Che14], where only the functional L_1 was introduced.

Hardy spaces under subgaussian estimates of the heat kernel was defined previously in [KU12]. Let X be a space of homogeneous space, L be a injective, non-negative, self-adjoint operator in $L^2(X)$ such that the semigroup generated by $-L$ satisfies Gaffney estimates of arbitrary order m. As in [Che14], the authors of [KU12] defined Hardy spaces $H^p_L(X)$ for $p \in [1,2]$. They showed that $L^p(X) = H^p(X)$. As an application, they proved $H^1_L(X)$ and $L^p(X)$ boundedness of some spectral multipliers of L.

D.2 Off-diagonal estimates

D.2.1 Gaffney estimates, first results

Definition D.2.1. *Let* (X, m, ρ) *be a measured space equipped with a quasidistance and* $p \in [1, +\infty]$*. We say that a family of operators* $(A_k)_{k\in}$*,* $I = \mathbb{N}^*$ *or* $\mathbb{R}^*_+$*, satisfies* $L^p(X, m, \rho)$ *(or* L^p*) Gaffney estimates* *if there exist $C, c, \eta > 0$ such that, for any sets $E, F \subset X$ and any function $f \in L^p(X, m)$,*

$$\|A_k[f\mathbb{1}_F]\|_{L^p(E)} \leq C \exp\left[-c\left(\frac{\rho(E,F)}{k}\right)^\eta\right] \|f\|_p. \tag{D.16}$$

It is plain to observe that (D.16) is equivalent to

$$\|A_k(f)\|_{L^p(E)} \leq C \exp\left[-c\left(\frac{\rho(E,F)}{k}\right)^\eta\right] \|f\|_p$$

whenever f is supported in F.
Arguing as in [HM03, Lemma 2.3], one can establish the following composition property about Gaffney estimates:

Proposition D.2.2. *If A_s and B_t satisfy L^p Gaffney estimates, then there exist $C, c, \eta > 0$ such that for all subsets $E, F \subset \Gamma$ and all functions $f \in L^p$,*

$$\|A_s B_t(f\mathbb{1}_F)\|_{L^p(E)} \leq C \exp\left(-c\left[\frac{\rho(E,F)}{s+t}\right]^\eta\right) \|f\|_{L^p} \tag{D.17}$$

In particular, $(A_sB_s)_{s\in I}$ satisfies Davies-Gaffney estimates. More precisely, if η_A and η_B are the constants involved in (D.16) *respectively for A_s and B_t , then the constant η that occurs in* (D.17) *can be chosen equal to* $\min\{\eta_A, \eta_B\}$.

Proposition D.2.3. *Let (Γ, μ, ρ) be a weighted graph satisfying* (DV) *and* (UE). *Then $(P^{k-1})_{k\in\mathbb{N}^*}$ satisfies L^p Gaffney estimates for any $p \in [1, +\infty]$.*

Moreover the coefficient η that appears in the Gaffney estimates is the same as the one given by (UE).

Proof: We will prove the cases $p = 1$ and $p = +\infty$. The conclusion can be then deduced from these endpoint estimates by interpolation. Moreover, since P^k is uniformly bounded on $L^1(\Gamma)$ and $L^\infty(\Gamma)$, we can assume without loss of generality that $\rho(E, F) \geq k$.

We begin with $p = 1$. Let $E, F \subset \Gamma$ and $f \in L^1(\Gamma)$. Then, for all $k \geq 1$

$$\begin{aligned}
\|P^{k-1}(f\mathbb{1}_F)\|_{L^1(E)} &= \sum_{x\in E} m(x) \left|\sum_{z\in F} p_{k-1}(x,z) f(z) m(z)\right| \\
&\leq \sum_{z\in F} |f(z)| m(z) \sum_{x\in E} p_{k-1}(x,z) m(x) \\
&\lesssim \sum_{z\in F} |f(z)| m(z) \sum_{x\in E} \frac{m(x)}{V(z,k)} \exp\left(-c\left(\frac{\rho(x,z)}{k}\right)^\eta\right) \\
&\leq \sum_{z\in F} |f(z)| m(z) \sum_{j\geq 0} \sum_{2^j\rho(z,E)\leq\rho(x,z)<2^{j+1}\rho(z,E)} \frac{m(x)}{V(z,k)} \exp\left(-c\left(\frac{2^j\rho(z,E)}{k}\right)^\eta\right) \\
&\leq \sum_{z\in F} |f(z)| m(z) \sum_{j\geq 0} \frac{V(z, 2^{j+1}\rho(z,E))}{V(z,k)} \exp\left(-c\left(\frac{2^j\rho(z,E)}{k}\right)^\eta\right) \\
&\lesssim \sum_{z\in F} |f(z)| m(z) \sum_{j\geq 0} \left(1 + \frac{2^j\rho(z,E)}{k}\right)^d \exp\left(-c\left(\frac{2^j\rho(z,E)}{k}\right)^\eta\right) \\
&\lesssim \sum_{z\in F} |f(z)| m(z) \sum_{j\geq 0} \exp\left(-\frac{c}{2}\left(\frac{2^j\rho(E,F)}{k}\right)^\eta\right) \\
&\lesssim \|f\|_{L^1} \sum_{l\geq 1} \left[\exp\left(-\frac{c}{2}\left(\frac{\rho(E,F)}{k}\right)^\eta\right)\right]^l \\
&\lesssim \|f\|_{L^1} \frac{1}{1-\exp(-\frac{c}{2})} \exp\left(-\frac{c}{2}\left(\frac{\rho(E,F)}{k}\right)^\eta\right) \\
&\lesssim \|f\|_{L^1} \exp\left(-\frac{c}{2}\left(\frac{\rho(E,F)}{k}\right)^\eta\right),
\end{aligned}$$

where the third line holds thanks to (UE), the sixth one is a consequence of (D.12) and the last but one because $\rho(E,F) \geq k$.

We turn to the case $p = +\infty$. One has for all $x \in E$,

$$\begin{aligned} |P^{k-1}(f\mathbb{1}_F)(x)| &\lesssim \frac{1}{V(x,k)} \sum_{z \in F} |f(z)| m(z) \exp\left(-c\left(\frac{\rho(x,z)}{k}\right)^\eta\right) \\ &\leq \|f\|_{L^\infty} \sum_{j \geq 0} \sum_{2^j \rho(z,E) \leq \rho(x,z) < 2^{j+1}\rho(z,E)} \frac{m(z)}{V(x,k)} \exp\left(-c\left(\frac{2^j \rho(x,F)}{k}\right)^\eta\right) \\ &\lesssim \|f\|_{L^\infty} \exp\left(-\frac{c}{2}\left(\frac{\rho(E,F)}{k}\right)^\eta\right), \end{aligned}$$

where the first line holds because of (UE) and the last line is obtained as in the case $p = 1$. $\square$

Proposition D.2.4. *Let* (Γ, μ, ρ) *be a weighted graph satisfying* (LB), (DV) *and* (UE). *Let* $m \in \mathbb{N}$. *Then the family* $(k^m \Delta^m P^{k-1})_{k \in \mathbb{N}^*}$ *satisfies* L^p *Gaffney estimates for any* $p \in (1, +\infty)$. *Moreover the coefficient* η *that appears in the Gaffney estimates is the same as the one given by* (UE).

Proof: The proof is similar to the one of Theorem 1.2 in [Dun06]. We give it for completeness. First, with Proposition D.2.2, we only need to prove the case $m = 1$. Then notice that we have for any $k \in \mathbb{N}$ the following operator identity (see (8) in [Dun06]),

$$I - P = \sum_{l=0}^{n} 2^{-l-1}(I - P^{2^l})^2 + 2^{-n-1}(I - P^{2^{n+1}}).$$

As a consequence, one has

$$\begin{aligned} &\|(I-P)P^{k-1}(f\mathbb{1}_F)\|_{L^p(E)} \\ &\qquad \leq \sum_{l=0}^{n} 2^{-l-1}\|(I - P^{2^l})^2 P^{k-1}(f\mathbb{1}_F)\|_{L^p(E)} + 2^{-n-1}\|(I - P^{2^{n+1}})P^{k-1}(f\mathbb{1}_F)\|_{L^p(E)}. \end{aligned} \tag{D.18}$$

When $2^n \leq k$, Proposition D.2.3 yields

$$\begin{aligned} \|(I - P^{2^{n+1}})P^{k-1}(f\mathbb{1}_F)\|_{L^p(E)} &\leq \|P^{k-1}(f\mathbb{1}_F)\|_{L^p(E)} + \|P^{k-1+2^{n+1}}(f\mathbb{1}_F)\|_{L^p(E)} \\ &\lesssim \exp\left[-c\left(\frac{\rho(E,F)}{3k}\right)^\eta\right]. \end{aligned} \tag{D.19}$$

Also, Lemma 2.1 in [Dun06] (which is only a consequence of the analyticity of P in L^p) implies

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{n} 2^{-l-1}\|(I - P^{2^l})^2 P^{k-1}(f\mathbb{1}_F)\|_{L^p(E)} &\leq \sum_{l=0^n} 2^{-l-1}\|(I - P^{2^l})^2 P^{k-1}\|_{p \to p}\|f\|_p \\ &\lesssim \sum_{l=0}^{n} 2^{-l-1}\left(\frac{2^l}{k}\right)^2 \|f\|_p \\ &\leq \frac{2^n}{k^2}\|f\|_p. \end{aligned} \tag{D.20}$$

In order to end the proof, we only need to choose the right n. If $k\exp\left(-c\left[\frac{\rho(E,F)}{5k}\right]^\eta\right) \geq 1$, we choose $n \in \mathbb{N}$ such that

$$2^n \leq k\exp\left(-c\left[\frac{\rho(E,F)}{5k}\right]^\eta\right) < 2^{n+1}$$

and the Gaffney estimates of $k\Delta P^{k-1}$ is a consequence of (D.18), (D.19) and (D.20). Otherwise $\exp\left(-c\left[\frac{\rho(E,F)}{5k}\right]^\eta\right) \leq \frac{1}{k}$ and the desired result is a consequence of Proposition D.2.3. $\square$

Corollary D.2.5. *Let* (Γ, μ, ρ) *be a weighted graph satisfying* (LB), (DV) *and* (UE). *Let* $M \in \mathbb{N}^*$. *Then* $([I-(I+s\Delta)^{-1}]^M)_{k\in\mathbb{R}_+^*}$ *satisfies* L^p *Gaffney estimates for any* $p \in (1,+\infty)$.

Moreover the coefficient η *that appears in the Gaffney estimates is the half of the one given by* (UE).

Proof: The proof is analogous to the one of Proposition C.2.6 once we have Proposition D.2.3. □

Corollary D.2.6. *Let* (Γ, μ, ρ) *be a weighted graph satisfying* (LB), (DV) *and* (UE). *Let* $M \in \mathbb{N}^*$, $p \in (1,+\infty]$ *and* $\epsilon > 0$. *Then the* (M,p,ϵ)*-molecules are uniformly bounded in* $L^1(\Gamma)$.

Proof: Let $q \in (1,p] \cap (1,+\infty)$. Then $([I-(I+s\Delta)^{-1}]^M)_{s\in\mathbb{R}_+^*}$ satisfies L^q Gaffney estimates. Thus, if $a = [I-(I+s\Delta)^{-1}]^M b$ is a molecule associated with the vertex $x \in \Gamma$ and the real $s > 0$, Corollary D.2.5 yields

$$\begin{aligned}
\|a\|_1 &\leq \sum_{j\geq 0} V(x,2^j s)^{1-\frac{1}{q}} \left\| [I-(I+s\Delta)^{-1}]^M b \right\|_{L^q(C_j(x,s))} \\
&\lesssim \sum_{i\geq 0}\sum_{j\geq 0} V(x,2^j s)^{1-\frac{1}{q}} \left\| [I-(I+s\Delta)^{-1}]^M [b\mathbb{1}_{C_i(x,s)}] \right\|_{L^q(C_j(x,s))} \\
&\lesssim \sum_{|i-j|\geq n_\rho} V(x,2^j s)^{1-\frac{1}{q}} e^{-c2^{\eta\max\{i,j\}}} \|b\|_{L^q(C_i(x,s))} + \sum_{|i-j|<n_\rho} V(x,2^j s)^{1-\frac{1}{q}} \|b\|_{L^q(C_i(x,s))} \\
&\lesssim \sum_{|i-j|\geq n_\rho} V(x,2^j s)^{1-\frac{1}{q}} V(x,2^i s)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} e^{-c2^{\eta j}} \|b\|_{L^p(C_i(x,s))} \\
&\qquad + \sum_{|i-j|<n_\rho} V(x,2^j s)^{1-\frac{1}{q}} V(x,2^i s)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \|b\|_{L^p(C_i(x,s))} \\
&\lesssim \sum_{|i-j|\geq n_\rho} \left(\frac{V(x,2^j s)}{V(x,2^i s)}\right)^{1-\frac{1}{q}} e^{-c2^{\eta j}} 2^{-i\epsilon} + \sum_{|i-j|<n_\rho} \left(\frac{V(x,2^j s)}{V(x,2^i s)}\right)^{1-\frac{1}{q}} 2^{-i\epsilon} \\
&\lesssim \sum_{|i-j|\geq n_\rho} 2^{jd(1-\frac{1}{q})} e^{-c2^{\eta j}} 2^{-i\epsilon} + \sum_{|i-j|<n_\rho} 2^{-i\epsilon} \\
&\lesssim 1,
\end{aligned}$$

where n_ρ denote $2+\ln_2(C_\rho)$, so that $\rho(C_j(x,s), C_i(x,s)) \gtrsim 2^{\max\{i,j\}} s$ if $j \geq i + n_\rho$. □

D.2.2 Gaffney estimates for the gradient

We establish in this paragraph some additional Gaffney estimates.

Proposition D.2.7. *Let* (Γ, μ, ρ) *satisfying* (LB), (DV) *and* (UE). *Let* $p \in (1,2)$. *There exist* $C, c > 0$ *such that for all sets* $E, F \subset \Gamma$, *there holds*

$$\|\sqrt{k}\nabla P^{k-1}[f\mathbb{1}_F]\|_{L^p(E)} \leq C \exp\left[-c\left(\frac{\rho(E,F)}{k}\right)^\eta\right] \|f\|_{L^p} \tag{D.21}$$

for any function $f \in L^p(\Gamma)$ *and any* $k \in \mathbb{N}^*$.

Moreover, the value of η *occurring in* (D.21) *is the same as the one in* (UE).

Proof: First, assume that f is nonnegative and in $L^1(\Gamma) \cap L^\infty(\Gamma)$. We define for all $k \in \mathbb{N}^*$ and all $p \in (1,2)$ a "pseudo-gradient" by

$$N_p(P^{k-1}f) = -(P^{k-1}f)^{2-p}[\partial_k + \Delta][(P^{k-1}f)^p]$$

where for any function u_k defined on $\Gamma \times \mathbb{N}^*$, $\partial_k u_k = u_{k+1} - u_k$.

Moreover we define for any function f defined on Γ the operator A defined by

$$Af(x) = \sum_{y\sim x} f(y).$$

Propositions A.4.6 and A.4.8 state the following results.

(i) For all $x \in \Gamma$, $N_p(P^{k-1}f)(x) \geq 0$. That is, for all $x \in \Gamma$,

$$J_k f(x) := -[\partial_k + \Delta][(P^{k-1}f)^p](x) \geq 0. \tag{D.22}$$

(ii) For all $p \in (1,2]$, there exists $C = C_p$ such that for all $k \in \mathbb{N}^*$ and all nonnegative function $f \in L^\infty(\Gamma)$, there holds

$$\left|\nabla P^{k-1}f(x)\right|^2 \leq C\left[AN_p(P^{k-1}f)\right](x). \tag{D.23}$$

As a consequence of (ii), if $0 \leq f \in L^\infty$ and $E, F \subset \Gamma$, one has

$$\begin{aligned}
\|\nabla P^{k-1}f\|^p_{L^p(E)} &\lesssim \|AN_p(P^{k-1}f)\|^{\frac{p}{2}}_{L^{\frac{p}{2}}(E)} \\
&\leq \sum_{x\in E}\left(\sum_{y\sim x}\left[N_p(P^{k-1}f)(y)\right]\right)^{\frac{p}{2}} m(x) \\
&\lesssim \sum_{y\in E_{+1}}\left[N_p(P^{k-1}f)(y)\right]^{\frac{p}{2}} m(y) \\
&\lesssim \|[N_p(P^{k-1}f)]^{\frac12}\|^p_{L^p(E_{+1})},
\end{aligned}$$

where

$$E_{+1} = \{y \in \Gamma,\, \exists x \in E:\, x \sim y\} \subset \{y \in \Gamma,\, \rho(y,E) \leq 1\}.$$

It remains to estimate $\|\left(N_p(P^{k-1}f)\right)^{\frac12}\|_{L^p(E_{+1})}$. Without loss of generality, we can assume that $\rho(E,F) \geq 2C_\rho k \geq 2C_\rho$ (otherwise, Corollary A.4.3 or Corollary 1.2 in [Dun08] would provide the conclusion of Proposition D.2.7). Under this assumption, one has $\rho(E_{+1},F) \geq \frac{\rho(E,F)}{C_\rho} - 1 \geq \frac{\rho(E,F)}{2C_\rho} \gtrsim \rho(E,F)$. The proof of the case where f is nonnegative will be thus complete if we prove that for all $p \in (1,2)$ and for all $E,F \subset \Gamma$

$$\|\left(N_p(P^{k-1}[f\mathbb{1}_F])\right)^{\frac12}\|_{L^p(E)} \leq \frac{C}{\sqrt{k}}\exp\left[-c\left(\frac{\rho(E,F)}{k}\right)^\eta\right]\|f\|_{L^p} \qquad \forall f \in L^p,\, \forall k \in \mathbb{N}^* \tag{D.24}$$

with some constant $C, c > 0$ independent of E and F.

In order to do this, we follow the idea of the proof of Corollary A.4.3. Let $u_k = P^{k-1}[f\mathbb{1}_F]$, then

$$\begin{aligned}
\|N_p^{\frac12}(u_k)\|^p_{L^p(E)} &= \sum_{x\in E} m(x)N_p^{p/2}(u_k)(x) \\
&= \sum_{x\in E} m(x)u_k^{\frac{p(2-p)}{2}} J_k f(x)^{p/2} \\
&\leq \left[\sum_{x\in E} m(x)u_k(x)^p\right]^{\frac{2-p}{2}}\left[\sum_{x\in E} J_k f(x)m(x)\right]^{\frac{p}{2}} \\
&\leq \|u_k\|^{p(1-\frac{p}{2})}_{L^p(E)}\left[\sum_{x\in\Gamma} J_k f(x)m(x)\right]^{\frac{p}{2}}
\end{aligned} \tag{D.25}$$

where the last but one step follows from Hölder inequality and the last one from (D.22) stated above. Yet,

$$\begin{aligned}
\sum_{x\in\Gamma} J_k f(x)m(x) &= -\sum_{x\in\Gamma}\partial_k(u_k^p)(x)m(x) \\
&\leq -p\sum_{x\in\Gamma} m(x)u_k^{p-1}(x)\partial_k u_k(x) \\
&\leq p\|u_k\|_p^{p/p'}\|\partial_k u_k\|_p
\end{aligned}$$

where the first line holds because $\sum_{x\in\Gamma}\Delta g(x)m(x) = 0$ if $g \in L^1$, the second line follows from Young inequality, and the third one from Hölder inequality again (with $\frac1p + \frac1{p'} = 1$). Here $\|u_k\|_p \leq \|f\|_p$ while $\|\partial_k u_k\|_p = \|\Delta u_k\|_p \lesssim \frac1k\|f\|_p$ by the analyticity of P on L^p. Thus

$$\sum_{x\in\Gamma} J_k f(x)m(x) \lesssim \frac1k\|f\|_p^p.$$

Substitution of the last estimate in (D.25) gives

$$\|N_p^{\frac{1}{2}}(u_k)\|_{L^p(E)} \lesssim \frac{1}{\sqrt{k}}\|f\|_p^{\frac{p}{2}}\|u_k\|_{L^p(E)}^{1-\frac{p}{2}},$$

which ends the proof of (D.24) if we replace $\|u_k\|_{L^p(E)}$ by the upper estimate given by Proposition D.2.3.

The result for the case where $f \in L^\infty(\Gamma) \cap L^1(\Gamma)$ is deduced by writing $f = f_+ - f_-$, with $f_+ = \max\{0, f\}$ and $f_- = \max\{0, -f\}$. Then

$$\begin{aligned}\|\nabla P^{k-1}[f\mathbb{1}_F]\|_{L^p(E)} &\leq \|\nabla P^{k-1}[f_+\mathbb{1}_F]\|_{L^p(E)} + \|\nabla P^{k-1}[f_-\mathbb{1}_F]\|_{L^p(E)} \\ &\lesssim \frac{1}{\sqrt{k}} \exp\left[-c\left(\frac{\rho(E,F)}{k}\right)^\eta\right][\|f_+\|_p + \|f_-\|_p] \\ &\lesssim \frac{1}{\sqrt{k}} \exp\left[-c\left(\frac{\rho(E,F)}{k}\right)^\eta\right]\|f\|_p.\end{aligned}$$

The result for the general case $f \in L^p(\Gamma)$ is then a consequence of the density of $L^\infty(\Gamma)\cap L^1(\Gamma)$ in $L^p(\Gamma)$.
□

Corollary D.2.8. *Let (Γ, μ, ρ) be a weighted graph satisfying* (LB), (DV) *and* (UE). *Let $M \in \mathbb{N}^*$.*

Then $(k^{M-\frac{1}{2}}d\Delta^{M-1}(I + k\Delta)^{-M+\frac{1}{2}})_{k\in\mathbb{N}^*}$ satisfies L^p Gaffney estimates for any $p \in (1, 2)$.

Moreover the coefficient η occurring in the Gaffney estimates is the half of the one given by (UE).

Proof: The proof is analogous to the one of Corollary C.2.11, using Proposition D.2.7. □

Corollary D.2.9. *Let (Γ, μ, ρ) be a weighted graph satisfying* (LB), (DV) *and* (UE). *Let $M \in \mathbb{N}^*$, $p \in (1, +\infty]$ and $\epsilon > 0$. Then the $(M - \frac{1}{2}, p, \epsilon)$-molecules are uniformly bounded in $L^1(T_\Gamma)$.*

Proof: The proof is analogous to the one of Corollary D.2.6, using Corollary D.2.8. □

D.2.3 L^q-L^p Gaffney estimates

Definition D.2.10. *Let (X, m) a measured space equipped with a quasidistance ρ and $\alpha > 0$. Let $E, F \subset X$, $x_0 \in X$ and $k \in \mathbb{N}$.*

We say that (E, F, x_0) is α-Gaffney suited if it satisfies one of the following conditions

(i) $\sup\{\rho(x_0, y), y \in F\} < \alpha\rho(E, F)$,

(ii) $\sup\{\rho(x_0, x), x \in E\} < \alpha\rho(E, F)$.

Moreover, we say that (E, x_0, k) is α-Gaffney suited if it satisfies

$$\sup\{d(x_0, x), x \in E\} < \alpha k.$$

At last, we say that (E, F, x_0, k) is α-Gaffney suited if either (E, F, x_0) or (E, x_0, k) or (F, x_0, k) is α-Gaffney suited.

Proposition D.2.11. *Let (Γ, μ, ρ) satisfying* (LB), (DV) *and* (UE). *Then for all $a \in \mathbb{N}$, there exists $C_a, c_a > 0$ such that*

$$|D^a p_{k-1}(x, y)| \lesssim \frac{C_a}{k^a V(x, k)} \exp\left[-c_a\left(\frac{\rho(x, y)}{k}\right)^\eta\right] \qquad \forall x, y \in \Gamma, \forall k \in \mathbb{N}^* \tag{D.26}$$

where D is the operator acting on sequences as $Da_k = a_k - a_{k+1}$.

Moreover, the value of η occurring in (D.26) *is the same as the one in* (UE).

Proof: The proof is similar to Theorem A.5.1 (see also Theorem 1.1 in [Dun06]). □

Proposition D.2.12. *Let (Γ, μ, ρ) satisfying* (LB), (DV) *and* (UE). *Let $j \in \mathbb{N}$, $\alpha > 0$, $p, q \in [1, +\infty]$ such that $q \leq p$.*

There exists c_j and $C_{j,\alpha}$ such that, for all sets $E, F \subset \Gamma$, all $x_0 \in \Gamma$, all $k \in \mathbb{N}$ such that (E, F, x_0, k) is α-Gaffney suited, there holds

$$\|(k\Delta)^a P^{k-1}[f\mathbb{1}_F]\|_{L^p(E)} \leq C_{j,\alpha} V(x_0, k)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \exp\left[-c_j\left(\frac{\rho(E,F)}{k}\right)^\eta\right]\|f\|_{L^q} \tag{D.27}$$

for any function $f \in L^q(X)$.

Moreover, the value of η occurring in (D.27) *is the same as the one in* (UE).

Proof: When E, F and x_0 satisfy (i) in Definition D.2.10 and when $q = 1$, the proof is inspired by the one of Theorem A.5.3.

We need the following result. There exist $C'_j, c'_j > 0$ such that

$$I_{c'_j} := \sum_{y\in\Gamma} |(kD)^j p_{k-1}(x,y)|^p e^{c'_j\left(\frac{\rho(x,y)}{k}\right)^\eta} m(y) \leq C'_j V(x,k)^{1-p}. \tag{D.28}$$

Indeed, the estimate (D.26) yields, with $c'_j = \frac{c_j}{2}$,

$$\begin{aligned}
I_{c'_j} &\lesssim \sum_{y\in\Gamma} \frac{1}{V(x,k)^p} e^{-\frac{c_j}{2}\left(\frac{\rho(x,y)}{k}\right)^\eta} m(y) \\
&\lesssim \frac{1}{V(x,k)^p} \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{y\in C_j(x,k)} e^{-\frac{c_j}{2}2^{j\eta}} \\
&\leq \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{V(x, 2^{j+1}k}{V(x,k)^p} e^{-\frac{c_j}{2}2^{j\eta}} \\
&\lesssim \frac{1}{V(x,k)^{p-1}} \sum_{j=0}^{+\infty} 2^{jd} e^{-\frac{c_j}{2}2^{j\eta}} \\
&\lesssim \frac{1}{V(x,k)^{p-1}}.
\end{aligned}$$

We can assume without loss of generality that $\|f\|_1 = 1$. Then, Jensen inequality implies

$$\begin{aligned}
\|(k\Delta)^a P^{k-1}(f\mathbb{1}_F)\|^p_{L^p(E)} &= \sum_{x\in E} m(x) \left(\sum_{z\in F} (kD)^a p_{k-1}(x,z) f(z) m(z)\right)^p \\
&\leq \sum_{x\in E} m(x) \sum_{z\in F} |(kD)^a p_{k-1}(x,z)|^p |f(z)| m(z) \\
&\leq e^{-c'_a\left(\frac{\rho(E,F)}{k}\right)^\eta} \sum_{z\in F} |f(z)| m(z) \sum_{x\in E} m(x) |(kD)^a p_{k-1}(x,z)|^p e^{c'_a\left(\frac{\rho(x,z)}{k}\right)^\eta} \\
&\lesssim \exp\left(-c'_a\left(\frac{\rho(E,F)}{k}\right)^\eta\right) \sum_{z\in F} |f(z)| m(z) \frac{1}{V(z,k)^{p-1}} \\
&\lesssim \frac{1}{V(x_0,k)^{p-1}} \exp\left(-c\left(\frac{\rho(E,F)}{k}\right)^\eta\right)
\end{aligned}$$

where, for the 4^{th} line, we use the estimate (D.28). The doubling property (D.12) shows

$$\frac{V(x_0,k)}{V(z,k)} \leq \frac{V(z, C_\rho[k+\alpha\rho(E,F)])}{V(z,k)} \lesssim \left(1 + \frac{\alpha\rho(E,F)}{k}\right)^d \lesssim (1+\alpha)^d \exp\left(\frac{c}{2}\left(\frac{\rho(E,F)}{k}\right)^\eta\right), \tag{D.29}$$

then the last line in the previous calculus holds for some $c < c'_a$.

Let us now prove the result when E, F and x_0 still satisfy (i) in Definition D.2.10 with $q \in (1, p]$. Without loss of generality, we can assume that f is supported in F and in this case, one has

$$\begin{aligned}
\|(k\Delta)^a P^{k-1}[f\mathbb{1}_F]\|_{L^p(E)} &\lesssim \frac{1}{V(x_0,k)^{1-\frac{1}{p}}} \exp\left(-c\left(\frac{\rho(E,F)}{k}\right)^\eta\right) \|f\|_{L^1(F)} \\
&\lesssim \left(\frac{m(F)}{V(x_0,k)}\right)^{1-\frac{1}{q}} \frac{1}{V(x_0,k)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}} \exp\left(-c\left(\frac{\rho(E,F)}{k}\right)^\eta\right) \|f\|_{L^q(F)}.
\end{aligned}$$

Then it remains to check that (D.12) yields

$$\frac{m(F)}{V(x_0,k)} \leq \frac{V(x_0, \alpha\rho(E,F))}{V(x_0,k)} \lesssim (1+\alpha)^d \left(1 + \frac{\rho(E,F)}{k}\right)^d \lesssim (1+\alpha)^d \exp\left(\frac{c}{2}\left(\frac{\rho(E,F)}{k}\right)^\eta\right). \tag{D.30}$$

The proof when (F, x_0, k) is α-Gaffney suited is the same as the case where (E, F, x_0) satisfies (i) in Definition D.2.10, once we replaced (D.30) and (D.29) by

$$\frac{m(F)}{V(x_0, k)} \lesssim \alpha^d \qquad \text{and} \qquad \frac{V(x_0, k)}{V(z, k)} \lesssim \alpha^d \quad \forall z \in F,$$

which are both consequences of (D.12).

When (E, F, x_0) satisfies (ii) in Definition D.2.10 or when (E, x_0, k) is α-Gaffney suited, the proof of Proposition D.2.12 can be deduced from the previous cases. A way to do this is to adapt the proof of Corollary A.5.4. □

D.2.4 Off diagonal decay of Lusin functionals

Proposition D.2.13. *Let (Γ, μ, ρ) satisfying (LB), (DV) and (UE), and $\alpha, \beta, M > 0$. Then there exists $C, c > 0$ such that, for all $x_0 \in \Gamma$ and all sets $E, F \subset \Gamma$ such that (E, F, x_0) is α-Gaffney suited, there holds for all $s > 0$ and all $f \in L^1(\Gamma) \cap L^2(\Gamma)$,*

$$\|L_\beta (I - (I + s\Delta)^{-1})^M [f \mathbb{1}_F]\|_{L^2(E)} \leq \frac{C}{V(x_0, \rho(E,F))^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{s}{\rho(E,F)} \right)^M \|f\|_{L^1}.$$

The proof of Proposition D.2.13 is similar to the one of Lemma A.3.5 (based itself on Lemma 3.1 in [BR09]). We need the following result, whose proof is analogous to the ones of Lemma A.7.1 and Proposition A.7.2.

Lemma D.2.14. *Let $M > 0$ and $\alpha \in [0, 1]$. Define $\mathcal{A} = \{(A_k^{d,u})_{k \in \mathbb{N}^*},\ d \in \mathbb{R}_+,\ u \in \mathbb{N}\}$, where, for all $l \geq 1$,*

$$A_k^{d,u} = k^\alpha \frac{\exp\left(- \left(\frac{d}{k+u} \right)^\eta \right)}{(k+u)^{1+M}}.$$

Then there exists $C = C_{M,\alpha}$ such that

$$\left(\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{k} a_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{k} a_k \qquad \forall (a_k)_k \in \mathcal{A}.$$

Proof: (Proposition D.2.13)

Without loss of generality, we can assume that f is supported in F. We also assume that x_0, E and F satisfy (i) of Definition D.2.10 (if they satisfy (ii) instead of (i), the proof is similar).

First, if $\sum_m \tilde{b}_m z^m$ is the Taylor series of the function $(1-z)^{-M}$, one has the identity

$$\begin{aligned} (I - (I + s\Delta)^{-1})^M f &= (s\Delta)^M (I + s\Delta)^{-M} f \\ &= \left(\frac{s\Delta}{1+s} \right)^M \left(I - \frac{s}{1+s} P \right)^{-M} f \\ &= \left(\frac{s\Delta}{1+s} \right)^M \sum_{m=0}^{+\infty} \tilde{b}_m \left(\frac{s}{1+s} \right)^m P^m f \\ &= (s\Delta)^M \sum_{m=0}^{\infty} b_m P^m f, \end{aligned} \tag{D.31}$$

where $b_m := \tilde{b}_m \frac{s^m}{(1+s)^{m+M}}$ and the series converges in $L^2(\Gamma)$. Notice that

$$\sum_{m=0}^{\infty} b_m = 1. \tag{D.32}$$

Moreover, let κ be the only integer such that $\kappa < \beta + M \leq \kappa + 1$. Since $\beta > 0$ and both κ and M are integers, notice that

$$M \leq \kappa \tag{D.33}$$

If $\sum_l a_l z^l$ is the Taylor series of the function $(1-z)^{\beta+M-\kappa-1}$, then one has

$$\Delta^{\beta+M} f = \sum_{l\geq 0} a_l P^l \Delta^{\kappa+1} f \tag{D.34}$$

where the sum converges in $L^2(\Gamma)$ (see Proposition C.2.1 for the proof of the convergence).
The Minkowski inequality together with the identities (D.31) and (D.34) yields

$$\begin{aligned}
&\|L_\beta(I-(I+s\Delta)^{-1})^M f\|_{L^2(E)} \\
&\quad = \left(\sum_{k\geq 1} k^{2\beta-1} \sum_{x\in E} \frac{m(x)}{V(x,k)} \sum_{y\in B(x,k)} m(y) |\Delta^\beta P^{k-1} (I-(I+s\Delta)^{-1})^M f(y)|^2 \right)^{\frac12} \\
&\quad \leq \left(\sum_{k\geq 1} k^{2\beta-1} \sum_{y\in D_k(E)} m(y) |\Delta^\beta P^{k-1} (I-(I+s\Delta)^{-1})^M f(y)|^2 \sum_{x\in B(y,k)} \frac{m(x)}{V(x,k)} \right)^{\frac12} \\
&\quad \lesssim \left(\sum_{k\geq 1} k^{2\beta-1} \|\Delta^\beta P^{k-1} (I-(I+s\Delta)^{-1})^M f\|^2_{L^2(D_k(E))} \right)^{\frac12} \\
&\quad \leq s^M \sum_{l,m\geq 0} a_l b_m \left(\sum_{k\geq 1} k^{2\beta-1} \|\Delta^{1+\kappa} P^{k+l+m-1} f\|^2_{L^2(D_k(E))} \right)^{\frac12} \\
&\quad := s^M \sum_{l,m\geq 0} a_l b_m \left(\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k} I(k,l,m)^2 \right)^{\frac12},
\end{aligned}$$

where $D_k(E)$ denotes the set $\{y\in\Gamma,\ \rho(y,E)<k\}$
We want to get the following estimate estimate: there exists $c>0$ such that

$$I(k,l,m) \lesssim J(k,l,m) := k^{M+\beta-\kappa} \frac{1}{V(x_0,\rho(E,F))} \frac{\exp\left[-c\left(\frac{\rho(E,F)}{k+l+m}\right)^\eta\right]}{(k+l+m)^{1+M}} \|f\|_{L^1}. \tag{D.35}$$

We will first establish (D.35) when $k \leq \frac{\rho(E,F)}{2C_\rho}$. In this case, notice that

$$\rho(D_k(E),F) \geq \frac{\rho(E,F)}{C_\rho} - k \geq \frac{\rho(E,F)}{2C_\rho}$$

and thus $(D_k(E),F,x_0)$ are $2C_\rho\alpha$-Gaffney suited. Proposition D.2.12 implies then

$$\begin{aligned}
I(k,l,m) &\lesssim \frac{k^\beta}{(k+l+m)^{\kappa+1}} \frac{1}{V(x_0,k+l+m)^{\frac12}} \exp\left(-c\left(\frac{\rho(E,F)}{2C_\rho(k+l+m)}\right)^\eta\right) \|f\|_{L^1} \\
&\lesssim \frac{k^{\beta+M-\kappa}}{(k+l+m)^{M+1}} \frac{1}{V(x_0,\rho(E,F))^{\frac12}} \exp\left(-\frac{c}{2}\left(\frac{\rho(E,F)}{2C_\rho(k+l+m)}\right)^\eta\right) \|f\|_{L^1}
\end{aligned}$$

where the last line holds thanks to estimate (D.30) and (D.33).
Otherwise, $k > \frac{\rho(E,F)}{2C_\rho}$ and then $(F,x_0,k+l+m)$ is $2C_\rho\alpha$-Gaffney suited and Proposition D.2.12 yields

$$\begin{aligned}
I(k,l,m) &\lesssim \frac{k^\beta}{(k+l+m)^{\kappa+1}} \frac{1}{V(x_0,k+l+m)^{\frac12}} \|f\|_{L^1} \\
&\lesssim \frac{k^{\beta+M-\kappa}}{(k+l+m)^{M+1}} \frac{1}{V(x_0,\rho(E,F))^{\frac12}} \|f\|_{L^1} \\
&\lesssim \frac{k^{\beta+M-\kappa}}{(k+l+m)^{M+1}} \frac{1}{V(x_0,\rho(E,F))^{\frac12}} \exp\left(-\left(\frac{\rho(E,F)}{k+l+m}\right)^\eta\right) \|f\|_{L^1}
\end{aligned} \tag{D.36}$$

where the second line holds thanks to (DV) and (D.33). This ends the proof of (D.35).

Recall that $M+\beta-\kappa \in (0,1]$. Then Lemma D.2.14 implies

$$\begin{aligned}\|L_\beta(I-(I+s\Delta)^{-1})^M f\|_{L^2(E)} &\lesssim s^M \sum_{k,l,m\geq 0} \frac{1}{k} a_l b_m J(k,l,m) \\ &= s^M \frac{\|f\|_{L^1}}{V(x_0,\rho(E,F))^{\frac12}} \sum_{m\geq 0} b_m \sum_{n\geq 1} \frac{\exp\left[-c\left(\frac{\rho(E,F)}{n+m}\right)^\eta\right]}{(n+m)^{1+M}} \sum_{l=0}^{n-1} a_l (n-l)^{M+\beta-\kappa-1}.\end{aligned} \tag{D.37}$$

We claim

$$\sum_{l=0}^{n-1} a_l (n-l)^{M+\beta-\kappa-1} \lesssim 1.$$

Indeed, when $M+\beta=\kappa+1$, one has $a_l=\delta_0(l)$ and the estimate is true. Otherwise, Lemma A.6.1 yields that $a_l \lesssim (l+1)^{\kappa-M-\beta}$ and therefore

$$\sum_{l=0}^{n-1} a_l (n-l)^{M+\beta-\kappa-1} \lesssim \int_0^1 t^{\kappa-M-\beta}(1-t)^{M+\beta-\kappa-1} dt < +\infty.$$

Besides,

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 1} \frac{\exp\left[-c\left(\frac{\rho(E,F)}{n+m}\right)^\eta\right]}{(n+m)^{1+M}} &= \rho(E,F)^{-M-1} \sum_{n\geq 1} \left(\frac{\rho(E,F)}{n+m}\right)^{1+M} \exp\left[-c\left(\frac{\rho(E,F)}{n+m}\right)^\eta\right] \\ &\lesssim \rho(E,F)^{-M-1}\left[\sum_{n=1}^{\rho(E,F)} 1 + \sum_{n>\rho(E,F)} \left(\frac{\rho(E,F)}{m+n}\right)^{M+1}\right] \\ &\lesssim \rho(E,F)^{-M}.\end{aligned}$$

Consequently, the estimate (D.37) yields

$$\begin{aligned}\|L_\beta(I-(I+s\Delta)^{-1})^M f\|_{L^2(E)} &\lesssim \frac{1}{V(x_0,\rho(E,F))^{\frac12}} \left(\frac{s}{\rho(E,F)}\right)^M \|f\|_{L^1} \sum_{m\geq 0} b_m \\ &= \frac{1}{V(x_0,\rho(E,F))^{\frac12}} \left(\frac{s}{\rho(E,F)}\right)^M \|f\|_{L^1}\end{aligned}$$

where the last line is due to (D.32). □

Let us define a discrete version of the Littlewood-Paley functionals, that can be found in [Fen15b]. For any $\beta>0$, the functional g_β is defined as

$$g_\beta f(x) = \left(\sum_{k=1}^\infty k^{2\beta-1} |\Delta^\beta P^{k-1} f(x)|^2\right)^2.$$

Proposition D.2.15. *Let* (Γ,μ,ρ) *satisfying* (LB), (DV) *and* (UE), *and* $\alpha,\beta>0$. *Then there exists* $C>0$ *such that, for all* $x_0\in\Gamma$ *and all sets* $E,F\subset\Gamma$ *such that* (E,F,x_0) *is* α*-Gaffney suited, there holds for all* $k\in\mathbb{N}^*$ *and all* $f\in L^1(\Gamma)\cap L^2(\Gamma)$,

$$\|L_\beta(I-P^k)[f\mathbb{1}_F]\|_{L^2(E)} \leq \frac{C}{V(x_0,\rho(E,F))^{\frac12}} \frac{k}{\rho(E,F)} \|f\|_{L^1}$$

and

$$\|g_\beta(I-P^k)[f\mathbb{1}_F]\|_{L^2(E)} \leq \frac{C}{V(x_0,\rho(E,F))^{\frac12}} \frac{k}{\rho(E,F)} \|f\|_{L^1}$$

Proposition D.2.16. *Let* (Γ,μ,ρ) *satisfying* (LB), (DV) *and* (UE), $M>0$, $\beta\in(0,1]$ *and* $\alpha>0$. *Then there exists* $C>0$ *such that, for all* $x_0\in\Gamma$ *and all sets* $E,F\subset\Gamma$ *such that* (E,F,x_0) *is* α*-Gaffney suited, there holds for all* $k\in\mathbb{N}^*$ *and all* $f\in L^1(\Gamma)\cap L^2(\Gamma)$,

$$\|g_\beta(k\Delta)^M[f\mathbb{1}_F]\|_{L^2(E)} \leq C\frac{C}{V(x_0,\rho(E,F))^{\frac12}} \left(\frac{k}{\rho(E,F)}\right)^M \|f\|_{L^1}$$

Proof: The proofs of these two propositions are similar to the one of Proposition D.2.13 and is left to the reader. See also Lemma A.3.5 and Lemmata C.2.14 and C.2.15. □

D.2.5 Application to interpolation results

Definition D.2.17. *A function $a \in L^2(\Gamma)$ is called an atom if there exist $x \in \Gamma$ and $k \in \mathbb{N}^*$ and a function $b \in L^2(\Gamma)$ supported in $B(x,k)$ such that*

(i) $a = (I - P^k)b$,

(ii) $\|b\|_{L^2} = \|b\|_{L^2(B(x,k))} \leq V(x,k)^{-\frac{1}{2}}$.

We say that f belongs to $E^1_0(\Gamma)$ if f admits an atomic representation, that is if there exist a finite sequence $(\lambda_i)_{i=0..N}$ and a finite sequence $(a_i)_{i=0..N}$ of atoms such that

$$f = \sum_{i=0}^{N} \lambda_i a_i. \tag{D.38}$$

The space is outfitted with the norm

$$\|f\|_{E^1_0} = \inf \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} |\lambda_j|, \ \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j a_j, \ \text{is a atomic representation of } f \right\}.$$

Theorem D.2.18. *Let (Γ, μ, ρ) satisfying* (LB)*,* (DV) *and* (UE)*. If T is an $L^2(\Gamma)$ bounded linear operator and if there exists $C > 0$ such that for all atoms*

$$\|Ta\|_{L^1} \leq C,$$

then for all $p \in (1, 2]$, there exists a constant $C = C(p) > 0$ such that

$$\|Tf\|_p \leq C_p \|f\|_p \qquad \forall f \in L^p \cap L^2.$$

The next result is an immediate corollary of Theorem D.2.18.

Corollary D.2.19. *Let (Γ, μ, ρ) satisfying* (LB)*,* (DV) *and* (UE)*. Let $(H^1_0(\Gamma), \|.\|_{H^1_0})$ a normed vector space that satisfies the continuous embedding*

$$E^1_0(\Gamma) \subset H^1_0(\Gamma) \subset L^1(\Gamma).$$

If T is an $L^2(\Gamma)$-bounded linear operator that verifies

$$\|Tf\|_{L^1} \lesssim \|f\|_{H^1_0} \qquad \forall f \in H^1_0(\Gamma) \cap L^2(\Gamma),$$

then for all $p \in (1, 2]$, there exists a constant $C = C(p) > 0$ such that

$$\|Tf\|_p \leq C_p \|f\|_p \qquad \forall f \in L^p \cap L^2.$$

The constant C_p can be chosen equal to $\|T\|^{\theta}_{L^2 \to L^2} \|T\|^{1-\theta}_{H^1_0 \to L^1}$, where θ is defined with

$$\frac{1}{p} = \frac{\theta}{2} + \frac{1-\theta}{1}.$$

Remark D.2.20. *The result holds even if the normed vector space H^1_0 is not a Banach space.*

This corollary will be used for the Hardy space $H^1_0 = H^1(\Gamma)$. However, since we did not establish Theorem D.1.26 yet, we cannot speak of $H^1(\Gamma)$.

Proof: (Theorem D.2.18)

The Vitali lemma, the weak L^1-boundedness and the L^p-boundedness (for $p > 1$) of the Hardy-Littlewood maximal function, or the Whitney decomposition are classical results from harmonic analysis and are proven in particular when the metric is a quasidistance. These tools are the only ones needed to prove Theorem 5.3 in [BZ08], which thus remains true in our context. That is, Theorem D.2.18 is a straightforward consequence of Theorem 5.3 in [BZ08] if we prove that for any $x \in \Gamma$, any $k \in \mathbb{N}^*$ and any $h \in L^2$, we have

$$\sup_{y \in B(x,k)} |P^k h(y)| \lesssim C_M \inf_{z \in B(x,k)} \left[\mathcal{M}(|h|^2)(z)\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{D.39}$$

With Proposition D.2.12, since $(B(x,k), x, k)$ is 1-Gaffney suited, there holds for any $z \in C_0(x,k) \supset B(x,k)$,

$$\begin{aligned}
\sup_{y \in B(x,k)} |P^k h(y)| &\leq \sum_{j \geq 0} \|P^k[h \mathbb{1}_{C_j(x,k)}]\|_{L^\infty(B(x,k))} \\
&\lesssim \sum_{j \geq 0} \frac{1}{V(x, 2^j k)^{\frac{1}{2}}} e^{-c 2^{j\eta}} \|h\|_{L^2(C_j(x,k))} \\
&\lesssim \sum_{j \geq 0} \frac{1}{V(x, C_\rho 2^{j+1} k)^{\frac{1}{2}}} e^{-c 2^{j\eta}} \|h\|_{L^2(B(x, C_\rho 2^{j+1} k))} \\
&\lesssim \sum_{j \geq 0} e^{-c 2^{j\eta}} [\mathcal{M}(|h|^2)(z)]^{\frac{1}{2}} \\
&\lesssim [\mathcal{M}(|h|^2)(z)]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

where the third line is due to (DV). Hence, (D.39) holds true. □

Let us recall a result on L^p boundedness of Calderòn-Zygmund operators (originally due to Blunck and Kunstmann, see Theorem 1.1 in [BK03], see also Theorem 1.1 in [Aus07]).

Definition D.2.21. *A function f on Γ is in $L^{1,\infty}(\Gamma)$ if*

$$\|f\|_{L^{1,\infty}} := \sup_{\lambda > 0} \lambda m(\{x \in \Gamma,\, |f(x)| > \lambda\}) < +\infty.$$

Theorem D.2.22. *For any ball B, let A_B be a linear operator in $L^2(\Gamma)$. Let T be a L^2-bounded sublinear operator such that for all balls $B = B(x,k)$ and all functions f supported in B*

$$\frac{1}{V(x, 2^j k)^{\frac{1}{2}}} \|T(I - A_B) f\|_{L^2(C_j(x,k))} \leq \alpha_j(B) \frac{1}{V(x,k)} \|f\|_{L^1(B)}$$

for all $j \geq 1$ and

$$\frac{1}{V(x, 2^j k)^{\frac{1}{2}}} \|A_B f\|_{L^2(C_j(x,k))} \leq \alpha_j(B) \frac{1}{V(x,k)} \|f\|_{L^1(B)}$$

for all $j \geq 0$.

If the coefficients $\alpha_j(B)$ satisfy

$$\sup_{B = B(x,k) \text{ ball}} \sum_{j \geq 0} \frac{V(x, 2^{j+1} k)}{V(x,k)} \alpha_j(B) < +\infty$$

then there exists a constant C such that

$$\|Tf\|_{L^{1,\infty}} \leq C \|f\|_{L^1} \qquad \forall f \in L^2 \cap L^1.$$

So by interpolation, for all $p \in (1,2]$, there exists a constant $C = C_p$ such that

$$\|Tf\|_{L^p} \leq C_p \|f\|_{L^p} \qquad \forall f \in L^2 \cap L^p.$$

As a consequence, we have the following result

Theorem D.2.23. *Let (Γ, μ, ρ) be a weighted graph satisfying* (LB), (DV) *and* (UE). *Then for all $\beta > 0$, the functional L_β is L^p bounded for any $p \in (1,2]$ and also bounded from $L^{1,\infty}$ to L^1.*

Moreover, if g_β is the discrete Littlewood-Paley quadratic functional defined for any $\beta > 0$ as

$$g_\beta f(x) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{2\beta - 1} |\Delta P^{k-1} f(x)|^2 \right)^2,$$

then g_β is also L^p bounded for any $p \in (1,2]$ and also bounded from $L^{1,\infty}$ to L^1.

Proof: We set $A_B = P^{k_B}$. It is then a straightforward consequence of Theorem D.2.22, Proposition D.2.15 and Proposition D.2.12. □

D.3 Tent spaces

In all this section, (Γ, μ, ρ) is a weighted graph satisfying (DV). We will prove that in this context, the atomic decomposition in tent spaces still holds (see [CMS85] and [Rus07] for similar results).

Definition D.3.1. *We introduce the following sets in $\Gamma \times \mathbb{N}^*$. If $x \in \Gamma$,*

$$\gamma(x) = \{(y,k) \in \Gamma \times \mathbb{N}^*,\, \rho(x,y) < k\},$$

if $F \subset \Gamma$,

$$\mathcal{R}(F) = \bigcup_{x \in F} \gamma(x) = \{(y,k) \in \Gamma \times \mathbb{N}^*,\, \rho(y,E) < k\}$$

$$\mathfrak{R}(F) = \{(y,k) \in \Gamma \times \mathbb{N}^*,\, \rho(y,E) < \frac{k}{2C_\rho}\},$$

and if $O \subset \Gamma$,

$$\mathcal{T}(O) = \{(y,k) \in \Gamma \times \mathbb{N}^*,\, \rho(y,O^c) \geq k\}$$

$$\mathfrak{T}(O) = \{(y,k) \in \Gamma \times \mathbb{N}^*,\, \rho(y,O^c) \geq \frac{k}{2C_\rho}\}.$$

We define the functionals $\mathcal{A}$ and $\mathcal{C}$ mapping functions on $\Gamma \times \mathbb{N}^*$ to functions on Γ by

$$\mathcal{A}f(x) = \left(\sum_{(y,k) \in \gamma(x)} \frac{m(y)}{kV(x,k)} |f(y,k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

and

$$\mathcal{C}f(x) = \sup_{x \in B} \left(\frac{1}{V(B)} \sum_{(y,k) \in \mathcal{T}(B)} \frac{m(y)}{k} |f(y,k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

For any $p \in [1,+\infty)$, $T^p(\Gamma)$ denotes the space of functions f on $\Gamma \times \mathbb{N}^*$ such that $\mathcal{A}f \in L^p(\Gamma)$. Moreover, $T^\infty(\Gamma)$ is the space of functions f on $\Gamma \times \mathbb{N}^*$ such that $\mathcal{C}f \in L^\infty(\Gamma)$. The tent space $T^p(\Gamma)$ is equipped with the norm $\|f\|_{T^p} = \|\mathcal{A}f\|_{L^p}$ (or $\|f\|_{T^p} = \|\mathcal{C}f\|_{L^\infty}$ when $p = \infty$).

Remark D.3.2. *One has the following equality of sets*

$$\mathcal{R}(E^c) = \mathcal{T}(O)^c \qquad \text{and} \qquad \mathfrak{R}(O^c) = \mathfrak{T}(O)^c.$$

Moreover, $\mathcal{T}(O) \subset \mathfrak{T}(O)$ and $\mathcal{R}(F) \supset \mathfrak{R}(F)$.

Definition D.3.3. *A function a defined on $\Gamma \times \mathbb{N}^*$ is a T^1-atom if there exists a ball B such that*

(i) a is supported in $\mathcal{T}(B)$,

(ii) $\displaystyle\sum_{(y,k) \in \mathcal{T}(B)} \frac{m(y)}{k} |a(y,k)|^2 \leq \frac{1}{V(B)}$.

Lemma D.3.4. *There exists a constant $C > 0$ such that, for every T^1-atom a, one has*

$$\|a\|_{T^1} \leq C$$

Proof: Indeed, if a is a T^1-atom, there holds

$$\begin{aligned}
\|a\|_{T^1} &= \sum_{x\in\Gamma} m(x) \left(\sum_{(y,k)\in\gamma(x)} \frac{m(y)}{kV(x,k)} |a(y,k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \sum_{x\in B} m(x) \left(\sum_{(y,k)\in\gamma(x)} \frac{m(y)}{kV(x,k)} |a(y,k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(V(B) \sum_{x\in B} m(x) \sum_{(y,k)\in\gamma(x)} \frac{m(y)}{kV(x,k)} |a(y,k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(V(B) \sum_{(y,k)\in\mathcal{T}(B)} \frac{m(y)}{k} |a(y,k)|^2 \sum_{x\in B(y,k)} \frac{m(x)}{V(x,k)} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\lesssim \left(V(B) \sum_{(y,k)\in\mathcal{T}(B)} \frac{m(y)}{k} |a(y,k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\lesssim 1,
\end{aligned}$$

where the last but one line holds because the doubling property (DV) implies $\displaystyle\sum_{x\in B(y,k)} \frac{m(x)}{V(x,k)} \lesssim 1$. □

Definition D.3.5. *Let $F \subset \Gamma$ and $\delta \in (0,1)$. We say that a point $x_0 \in \Gamma$ has global δ-density with respect to F if, for all $k \in \mathbb{N}^*$,*

$$\frac{m(F\cap B(x_0,k))}{V(x_0,k)} \geq \delta.$$

We define F^* as the set made of the points in Γ with δ-density with respect to F. If $O = F^c$, then we define O_* as

$$O_* := (F^*)^c.$$

Proposition D.3.6. *Let $\delta \in (0,1)$. One has*

(i) $F^* \subset F$,

(ii) there exists $c_\delta > 0$ such that any set $O = F^c$ with finite measure verify $m(O_*) \leq c_\delta m(O)$.

Proof: The point (i) is obvious. For (ii), notice that $O_* \subset \{x \in \Gamma, \mathcal{M}(\mathbb{1}_O) > 1-\delta\}$, where $\mathcal{M}$ denote the Hardy-Littlewood maximal function. We conclude then by applying the weak L^1-boundedness of the maximal function. □

Lemma D.3.7. *There exists $\delta \in (0,1)$ (sufficiently close to 1) so that whenever $F \subset \Gamma$ and ϕ is a non-negative function on $\Gamma \times \mathbb{N}^*$, there holds*

$$\sum_{(y,k)\in\mathfrak{R}(F^*)} \phi(y,k)V(y,k)m(y) \lesssim \sum_{x\in F} m(x) \sum_{(y,k)\in\gamma(x)} \phi(y,k)m(y).$$

Proof: We only need to check that for any $(y,k) \in \mathfrak{R}(F^*)$, one has

$$m\{x \in F, x \in B(y,k)\} \gtrsim V(y,k). \tag{D.40}$$

Indeed, once (D.40) is established, Fubini theorem yields

$$\begin{aligned}
\sum_{(y,k)\in\mathfrak{R}(F^*)} \phi(y,k)V(y,k)m(y) &\lesssim \sum_{(y,k)\in\mathfrak{R}(F^*)} \phi(y,k)m(y) \sum_{x\in\Gamma} m(x)\mathbb{1}_{F\cap B(y,k)}(x) \\
&= \sum_{x\in F} m(x) \sum_{(y,k)\in\mathfrak{R}(F^*)} \phi(y,k)m(y)\mathbb{1}_{B(x,k)}(y) \\
&\leq \sum_{x\in F} m(x) \sum_{(y,k)\in\gamma(x)} \phi(y,k)m(y).
\end{aligned}$$

We turn now to the proof of (D.40). Since $(y,k) \in \mathfrak{R}(F^*)$, there exists $x_0 \in F^*$ such that $y \in B\left(x_0, \frac{k}{2C_\rho}\right)$. Notice then that $B\left(x_0, \frac{k}{2C_\rho}\right) \subset B(y,k)$. Consequently, assumption (DV) implies

$$m(B(x_0,k) \cap B(y,k)) \geq V\left(x_0, \frac{k}{2C_\rho}\right) \geq cV(x_0,k)$$

for some constant $c \in (0,1]$ depending only of C_{dv} and C_ρ. Thus

$$m(B(x_0,k) \cap B(y,k)^c) \leq (1-c)V(x_0,k)$$

Therefore,

$$\begin{aligned} m(F \cap B(y,k)) &\geq m(F \cap B(x_0,k)) - m(B(x_0,k) \cap B(y,k)^c) \\ &\geq (\delta + c - 1)V(x_0,k) \\ &\gtrsim (\delta + c - 1)V(y,k) \end{aligned}$$

where the last line holds because the doubling property (DV) implies $V(y,k) \leq V(x_0, 2C_\rho k) \lesssim V(x_0,k)$. As a consequence, (D.40) holds and the lemma is proven if we choose $\delta \in (1-c, 1)$. □

Theorem D.3.8. *(i) The following inequality holds, whenever $f \in T^1(\Gamma)$ and $g \in T^\infty(\Gamma)$:*

$$\sum_{(y,k) \in \Gamma \times \mathbb{N}^*} \frac{m(y)}{k} |f(y,k)g(y,k)| \lesssim \sum_{y \in \Gamma} \mathcal{A}f(x)\mathcal{C}f(x).$$

(ii) The pairing

$$\langle f, g \rangle = \sum_{(y,k) \in \Gamma \times \mathbb{N}^*} \frac{m(y)}{k} f(y,k)g(y,k)$$

realizes $T^\infty(\Gamma)$ as equivalent to the Banach space dual of $T^1(\Gamma)$.

(iii) Every element $f \in T^1(\Gamma)$ can be written as

$$f = \sum \lambda_j a_j \qquad \text{in } T^1(\Gamma),$$

where a_j are T^1-atoms, $\lambda_j \in \mathbb{R}$, $\sum |\lambda_j| \lesssim \|f\|_{T^1}$.

(iv) Moreover, if $f \in T^1(\Gamma) \cap T^2(\Gamma)$, the atomic decomposition can be chosen to be convergent in $T^2(\Gamma)$.

We use the following Whitney decomposition.

Lemma D.3.9. *Let (Γ, μ) a weighted graph equipped with a quasidistance ρ satisfying* (DV).

There exists $C > 0$ such that, for all subset $E \subset \Gamma$ with finite measure, there exists a finite sequence of sets $(Q_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ such that

(i) $E = \bigcup_{i=1}^n Q_i$,

(ii) $Q_i \cap Q_j = \emptyset$ *if* $i \neq j$,

(iii) $\frac{1}{C}\rho(Q_i, E^c) \leq r_i := \max\{\rho(x,y),\, x,y \in Q_i\} + 1 \leq C\rho(Q_i, E^c)$.

Proof: (Lemma D.3.9)

Let M (depending only of C_ρ) be the constant replacing 5 in the version of the lemma '$5r$' adapted to quasidistances. Define for all $x \in E$, $B_x = B(x, \frac{\rho(x,E^c)}{M})$. We use then Lemma '$Mr$' and we end the proof as in [CMS83].

Notice that in the particular case of graphs, under assumption (DV), $m(E) < +\infty$ is equivalent to E finite. Thus the sequence $(Q_j)_j$ is necessary finite. □

Proof: (Theorem D.3.8)

(i) Let us define the truncated cone $\gamma^h(x)$ by

$$\gamma^h(x) = \{(y,k) \in \Gamma \times \mathbb{N}^*,\ \rho(x,y) < k < h\}$$

and define

$$\mathcal{A}(f|h)(x) = \left(\sum_{(y,k)\in\gamma^h(x)} \frac{m(y)}{kV(x,k)} |f(y,k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Check that $\mathcal{A}(f|h)(x)$ is nondecreasing in h, and that $\mathcal{A}(f|\infty)(x) = \mathcal{A}f(x)$. For every g, we define the stopping time $h(x)$ as

$$h(x) = \sup\{h \in \mathbb{N}^*, \mathcal{A}(g|h)(x) \leq M\mathcal{C}g(x)\}$$

where M is a large constant that will be fixed later.

Define for $x \in \Gamma$ and $k \in \mathbb{N}^*$ the sets $B_2(x,k)$ and $B_3(x,k)$ by

$$B_2(x,k) := \{a \in \Gamma,\ \exists y \in \Gamma :\ \max\{\rho(x,y), \rho(y,a)\} < k\}$$

and

$$B_3(x,k) := \{a \in \Gamma,\ \exists y,z \in \Gamma :\ \max\{\rho(x,y), \rho(y,z), \rho(z,a)\} < k\}.$$

Let us prove first that for any $x \in \Gamma$ and $k \in \mathbb{N}^*$, one has

$$\bigcup_{y\in B(x,k)} \gamma^k(y) \subset \mathcal{T}(B_3(x,k)). \tag{D.41}$$

Indeed, if $(a,l) \in \bigcup_{y\in B(x,k)} \gamma^k(y)$, then there exists $y \in B(x,k)$ such that $\rho(a,y) < l < k$. As a consequence $\max\{\rho(x,y), \rho(y,a)\} < k$ and $a \in B_2(x,k)$. From the definition of $B_3(x,k)$, one get easily that $\rho(B_2(x,k), B_3(x,k)^c) \geq k$. Hence $\rho(a, B_3(x,k)^c) \geq k > l$, which yields that $(a,l) \in \mathcal{T}(B_3(x,k))$.

Let us prove now the following result: whenever $x \in \Gamma$ and $k \in \mathbb{N}^*$, there holds

$$m(\{y \in B(x,k),\ h(y) \geq k\}) \geq \frac{1}{2} V(x,k). \tag{D.42}$$

Check that $B(x,k) \subset B_3(x,k) \subset B(x,\alpha k)$ where $\alpha = C_\rho(1+2C_\rho) \geq 1$. Together with (D.41), it yields

$$\begin{aligned}
\frac{1}{V(x,k)} \sum_{y\in B(x,k)} [\mathcal{A}(g|k)]^2(y) m(y) &= \frac{1}{V(x,k)} \sum_{y\in B(x,k)} m(y) \sum_{(z,l)\in\gamma^k(y)} \frac{m(z)}{lV(y,l)} |g(z,l)|^2 \\
&\leq \frac{1}{V(x,k)} \sum_{(z,l)\in\mathcal{T}(B(x,\alpha k))} \frac{m(z)}{l} |g(z,l)|^2 \sum_{y\in B(z,l)} \frac{m(y)}{V(y,l)} \\
&\lesssim \frac{1}{V(x,\alpha k)} \sum_{(z,l)\in\mathcal{T}(B(x,\alpha k))} \frac{m(z)}{l} |g(z,l)|^2 \\
&\leq \inf_{y\in B(x,k)} \mathcal{C}g(y)^2
\end{aligned}$$

where the third line is a consequence of the doubling property (DV) and the fact that

$$\sum_{y\in B(z,l)} \frac{m(y)}{V(y,l)} \lesssim 1.$$

Thus, we deduce

$$\begin{aligned}\frac{M^2}{V(x,k)} m(\{y\in B,\, h(y)<r\}) \inf_{y\in B(x,k)} \mathcal{C}g(y)^2 &\leq \frac{1}{V(x,k)} \sum_{y\in B(x,k)} \mathbb{1}_{\{h(y)<r\}} [M\mathcal{C}g(y)]^2 m(y) \\ &\leq \frac{1}{V(x,k)} \sum_{y\in B(x,k)} \mathbb{1}_{\{h(y)<r\}} \mathcal{A}(g|r)^2 m(y) \\ &\leq \frac{1}{V(x,k)} \sum_{y\in B(x,k)} \mathcal{A}(g|r)^2 m(y) \\ &\leq C_{\rho,dv} \inf_{y\in B(x,k)} \mathcal{C}g(y)^2.\end{aligned}$$

where $C_{\rho,dv}$ depends only of C_ρ and C_{dv} We choose then M such that $\frac{C_{\rho,dv}}{M^2} \leq \frac{1}{2}$ and we obtain (D.42).

From (D.42) and with Fubini theorem, one has for any non-negative function ϕ on $\Gamma\times\mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\sum_{(y,k)\in\Gamma\times\mathbb{N}^*} \phi(y,k)V(y,k)m(y) &\lesssim \sum_{(y,k)\in\Gamma\times\mathbb{N}^*} \phi(y,k)m(y) \sum_{x\in\Gamma} m(x)\mathbb{1}_{\{x\in B(y,k),\, h(x)\geq k\}} \\ &= \sum_{x\in\Gamma} m(x) \sum_{(y,k)\in\Gamma\times\mathbb{N}^*} \phi(y,k)m(y)\mathbb{1}_{\{y\in B(x,k),\, k\leq h(x)\}} \\ &= \sum_{x\in\Gamma} m(x) \sum_{(y,k)\in\gamma^{h(x)}(x)} \phi(y,k)m(y).\end{aligned}$$

Take $\phi(y,k) = |f(y,k)||g(y,k)|\frac{1}{kV(y,k)}$ and by Cauchy-Schwarz inequality,

$$\begin{aligned}\sum_{(y,k)\in\Gamma\times\mathbb{N}^*} \frac{m(y)}{k}|f(y,k)g(y,k)| &\lesssim \sum_{x\in\Gamma} \mathcal{A}(f|h(x))(x)\mathcal{A}(g|h(x))(x)m(x) \\ &\leq M\sum_{x\in\Gamma} \mathcal{A}f(x)\mathcal{C}g(x)m(x)\end{aligned}$$

(ii) The fact that every element $g\in T^\infty$ induces a linear functional on T^1 is immediate from (i). The converse is obtained by a classical argument. Indeed, if $l\in(T^1(\Gamma))^*$, we construct a function $g\in L^2_{loc}(\Gamma)$ such that $l(f) = <f,g>$ for any function f with finite support. We check that $g\in T^\infty$ and we conclude by noticing that the space made of finitely supported functions is dense in $T^1(\Gamma)$. Consequently, $T^\infty(\Gamma)$ is the dual of $T^1(\Gamma)$. See proof of Theorem 1 in [CMS85] for details.

(iii) Let $\delta\in(0,1)$ sufficiently close to 1 so that Lemma D.3.7 is verified. Define for all $i\in\mathbb{Z}$ the set O^i as $O^i = \{x\in\Gamma,\, \mathcal{A}(f) > 2^i\}$ and let $F_i = (O^i)^c$. We can define then F_i^* and O^i_* and Proposition D.3.6 provides $O^i_*\supset O^i$ and $m(O^i_*)\lesssim m(O^i)$. Notice that $\bigcup \mathcal{T}(O^i)$ and then $\bigcup \mathfrak{T}(O^i_*)$ contain the support of f. Indeed if $f(y,k)>0$, then for all $x\in B(y,k)$, $\mathcal{A}f(x) > \epsilon_{y,k} > 0$. Thus $B(y,k)\subset O_i$ for some $i\in\mathbb{Z}$ and then $(y,k)\in\mathcal{R}(O_i)$.

Remark that $m(O^i_*)\lesssim m(O^i)\lesssim 2^{-i}\|f\|_{T^1} < +\infty$. Let $(Q^i_j)_{j\in\mathbb{N}}$ be the Whitney decomposition of O^i_* provided by Lemma D.3.9. Then we can write $\mathfrak{T}(O^i_*)\backslash\mathfrak{T}(O^{i+1}_*)$ as a disjoint union $\bigcup_j \Delta^i_j$ where

$$\Delta^i_j = (Q^i_j\times\mathbb{N}^*)\cap(\mathfrak{T}(O^i_*)\backslash\mathfrak{T}(O^{i+1}_*)).$$

Denote by r^i_j the diameter of Q^i_j and $x^i_j\in Q^i_j$, we claim that there exists $C>0$ such that any j,i, there holds

$$\Delta^i_j \subset \mathcal{T}(B^i_j) := \mathcal{T}(B(x^i_j, Cr^i_j)). \tag{D.43}$$

It suffices to check that $\max\{k\in\mathbb{N}^*,\, \exists x\in\Gamma : (x,k)\in\Delta^i_j\}\lesssim r^i_j$. But for all $y\in Q^i_j$,

$$\begin{aligned}r^i_j &\gtrsim \rho(Q^i_j,(O^i_*)^c) \\ &\gtrsim \rho(y,(O^i_*)^c) \\ &\geq \frac{1}{2C_\rho}\max\{k\in\mathbb{N}^*,\, (y,k)\in\mathfrak{T}(O^i_*)\}.\end{aligned}$$

And thus

$$
\begin{aligned}
r_j^i &\gtrsim \max\{k \in \mathbb{N}^*,\, \exists y \in Q_j^i : (y,k) \in \mathfrak{T}(O_*^i)\} \\
&= \max\{k \in \mathbb{N}^*,\, \exists y \in \Gamma : (y,k) \in (Q_j^i \times \mathbb{N}^*) \cap \mathfrak{T}(O_*^i)\} \\
&\leq \max\{k \in \mathbb{N}^*,\, \exists y \in \Gamma : (y,k) \in \Delta_j^i\}
\end{aligned}
$$

Now write

$$a_j^i = f \mathbb{1}_{\Delta_j^i} V(B_j^i)^{-\frac{1}{2}} (\mu_j^i)^{-\frac{1}{2}}$$

where

$$\mu_j^i = \sum_{(y,k)\in\Delta_j^i} \frac{m(y)}{k} |f(y,k)|^2$$

and set

$$\lambda_j^i = V(B_j^i)^{\frac{1}{2}} (\mu_j^i)^{\frac{1}{2}}.$$

We have then

$$f = \sum_{i,j} \lambda_j^i a_j^i, \tag{D.44}$$

where the convergence holds pointwise. Observe first that by construction, a_j^i is a T^1-atom associated with the ball B_j^i. Thus the series in (D.44) converge in $T^1(\Gamma)$ and provide the desired atomic decomposition if we have that $\sum \lambda_j^i \lesssim \|\mathcal{A}f\|_{L^1}$. However, since $x \notin B_j^i$ implies that $(y,k) \notin \hat{B}_j^i$ for all $(y,k) \in \gamma(x)$, remark that

$$
\begin{aligned}
\mu_j^i &\leq \sum_{(y,k)\in\mathcal{T}(B_j^i)\cap\mathfrak{R}(F_{i+1}^*)} \frac{m(y)}{k} |f(y,k)|^2 \\
&= \sum_{(y,k)\mathfrak{R}(F_{i+1}^*)} \frac{m(y)}{k} |f(y,k)|^2 \mathbb{1}_{\mathcal{T}(B_j^i)}(y,k) \\
&\lesssim \sum_{x\in F_{i+1}} m(x) \sum_{(y,k)\in\gamma(x)} \frac{m(y)}{kV(y,k)} |f(y,k)|^2 \mathbb{1}_{\mathcal{T}(B_j^i)}(y,k) \\
&\leq \sum_{x\in F_{i+1}} m(x) \sum_{(y,k)\in\gamma(x)} \frac{m(y)}{kV(y,k)} |f(y,k)|^2 \mathbb{1}_{B_j^i}(x) \\
&= \sum_{x\in B_j^i\cap F_{i+1}} |\mathcal{A}f(x)|^2 m(x) \\
&\leq V(B_j^i) 4^{i+1},
\end{aligned}
$$

where we used Lemma D.3.7 for the third line and the definition of F_{i+1} for the last one. We conclude by noticing that

$$
\begin{aligned}
\sum_{i,j} \lambda_j^i &\lesssim \sum_{i,j} V(B_j^i) 2^i \\
&\lesssim \sum_{i,j} m(Q_j^i) 2^i \\
&= \sum_{i\in\mathbb{Z}} |O_i^*| 2^i \\
&\lesssim \sum_{i\in\mathbb{Z}} |O_i| 2^i \\
&\lesssim \|\mathcal{A}f\|_{L^1}.
\end{aligned}
$$

(iv) For the last point, it suffices to show that if $f \in T^2(\Gamma) \cap T^1(\Gamma)$ the decomposition constructed in (iii) converges in T^2. Notice that

First, since $\sum_{x\in V(y,k)} \frac{m(x)}{V(x,k)} \lesssim 1$, check that

$$\|f\|_{T^2}^2 \lesssim \sum_{(y,k)\in\Gamma\times\mathbb{N}^*} \frac{m(y)}{k}|f(y,k)|^2.$$

Recall that the sets Δ_j^i form a partition of the support of f. Thus

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{|i|,j>N} \lambda_j^i a_j^i\right\|_{T^2}^2 &\simeq \sum_{(y,k)\in\Gamma\times\mathbb{N}^*} \frac{m(y)}{k}\left|\sum_{|i|,j>N} \mathbb{1}_{\Delta_j^i} f(y,k)\right|^2 \\ &\leq \sum_{|i|,j>N} \sum_{(y,k)\in\Delta_j^i} \frac{m(y)}{k}|f(y,k)|^2 \\ &\xrightarrow{N\to\infty} 0.\end{aligned}$$

□

D.4 Equality of Hardy spaces

In all this section, (Γ,μ) is a weighted graph, equipped with a quasidistance ρ and satisfying (LB) and (DV) and (UE).

D.4.1 $H^1_{mol} \cap L^2 \subset E^1_{quad}$

Proposition D.4.1. *Let $\epsilon > 0$, $M \in \mathbb{N}^*$, $p \in (1,2]$ and $\beta > 0$. Then $H^1_{mol,M,p,\epsilon}(\Gamma)\cap L^2(\Gamma) \subset E^1_{quad,\beta}(\Gamma)$ and*

$$\|f\|_{H^1_{quad,\beta}} \lesssim \|f\|_{H^1_{mol,M,p,\epsilon}} \qquad \forall f \in H^1_{mol,M,p,\epsilon}(\Gamma)\cap L^2(\Gamma).$$

Proof: The proof is similar to the one of Proposition C.4.1. Let $f \in H^1_{mol,M,p,\epsilon} \cap L^2(\Gamma)$. Then there exist $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell^1$ and a sequence $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ of (M,p,ϵ)-molecules such that $f = \sum \lambda_i a_i$ where the convergence is in $L^1(\Gamma)$ and

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} |\lambda_i| \simeq \|f\|_{H^1_{mol,M,p,\epsilon}}.$$

First, since $\|P^k\|_{1\to 1} \leq 1$ for all $k \in \mathbb{N}$, the operators Δ^β and then $\Delta^\beta P^{k-1}$ are L^1-bounded for $\beta > 0$ (see [CSC90]). Consequently,

$$\Delta^\beta P^{l-1} \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_i a_i = \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_i \Delta^\beta P^{l-1} a_i.$$

Since the L^1-convergence in Γ implies the pointwise convergence, that is, for all $x \in \Gamma$,

$$\begin{aligned}\left|\Delta^\beta P^{k-1} \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_i a_i(x)\right| &= \left|\sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_i \Delta^\beta P^{k-1} a_i(x)\right| \\ &\leq \sum_{i\in\mathbb{N}} |\lambda_i| \left|\Delta^\beta P^{k-1} a_i(x)\right|.\end{aligned}$$

From here, the estimate

$$\|L_\beta f\|_{L^1} = \left\|L_\beta \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_i a_i\right\|_{L^1} \lesssim \sum_{i\in\mathbb{N}} |\lambda_i| \|L_\beta a_i\|_{L^1}$$

is just a consequence of the generalized Minkowski inequality.

It remains to prove that there exists a constant C such that for all (M,p,ϵ)-molecules a, one has

$$\|L_\beta a\|_{L^1} \leq C. \tag{D.45}$$

Let $x \in \Gamma$ and $s > 0$ associated with the (M, p, ϵ)-molecule a. By Hölder inequality and the doubling property, we may write

$$\|L_\beta a\|_{L^1} \lesssim \sum_{j=0}^{\infty} V(x, 2^j s)^{1-\frac{1}{p}} \|L_\beta a\|_{L^p(C_j(x,s))}. \tag{D.46}$$

We will now estimate each term of the above sum. We treat first the case $j = 0$. Remark that $\|(I + s\Delta)^{-1}\|_{L^p \to L^p} \leq 1$. Then $(I - (I + s\Delta)^{-1})^M$ is L^p-bounded by 1. Together with the fact that L_β is L^p-bounded (see Theorem D.2.23), one has

$$\|L_\beta a\|_{L^p(C_0(x,s))} \lesssim \|a\|_{L^p} \leq \|b\|_{L^p} \lesssim \frac{1}{V(x,s)^{1-\frac{1}{p}}}.$$

When $j \geq 1$, decompose $\|L_\beta a\|_{L^p(C_j(x,s))}$ as

$$\|L_\beta a\|_{L^p(C_j(x,s))} \leq \sum_{k \geq 0} \left\| L_\beta (I - (I + s\Delta)^{-1})^M [\mathbb{1}_{C_k(x,s)}\, b] \right\|_{L^p(C_j(x,s))}.$$

Notice, if $|j - k| \geq n_\rho$, that

$$\rho(C_k(x,s), C_j(x,s)) \simeq 2^{\max\{j,k\}} s$$

where n_ρ stands for $2 + \ln_2 C_\rho$.

If $|j - k| < n_\rho$, the L^p-boundedness of L_β and the uniform L^p-boundedness of $(I - (I + s\Delta)^{-1})^M$ implies

$$\left\| L_\beta (I - (I + s\Delta)^{-1})^M [\mathbb{1}_{C_k(x,s)}\, b] \right\|_{L^p(C_j(x,s))} \lesssim \|b\|_{L^p(C_k(x,s))}.$$

Besides, there exists $\alpha > 0$ such that $(C_k(x,s), C_j(x,s), x)$ are α-Gaffney suited whenever $|j - k| \geq n_\rho$. Thus, Proposition D.2.13 yields

$$\begin{aligned}
\|L_\beta a\|_{L^p(C_j(B))} &\lesssim \sum_{|j-k| \geq n_\rho} V(x, 2^j s)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{2}} \left\| L_\beta (I - (I + s\Delta)^{-1})^M [\mathbb{1}_{C_k(x,s)}\, b] \right\|_{L^2(C_j(x,s))} \\
&\qquad + \sum_{|j-k| < n_\rho} \|b\|_{L^p(C_k(x,s))} \\
&\lesssim \sum_{|j-k| \geq n_\rho} V(x, 2^j s)^{\frac{1}{p} - 1} 2^{-\max\{j,k\} M} \|b\|_{L^1(C_k(x,s))} + \sum_{|j-k| < n_\rho} \|b\|_{L^p(C_k(x,s))} \\
&\lesssim \sum_{|j-k| \geq n_\rho} V(x, 2^j s)^{\frac{1}{p} - 1} 2^{-\max\{j,k\} M} + \sum_{|j-k| < n_\rho} \frac{2^{-k\epsilon}}{V(x, 2^k s)^{1-\frac{1}{p}}} \\
&\lesssim 2^{-j\bar{\epsilon}} V(x, 2^j s)^{\frac{1}{p} - 1} \left(\sum_{|j-k| \geq n_\rho} 2^{-k\frac{M}{2}} + \sum_{|j-k| < n_\rho} 2^{-k\frac{\epsilon}{2}} \right) \\
&\lesssim 2^{-\bar{\epsilon} j} V(x, 2^j s)^{\frac{1}{p} - 1}
\end{aligned}$$

where $\bar{\epsilon} = \frac{1}{2} \min\{\epsilon, M\}$.

As a consequence, one has

$$\begin{aligned}
\|L_\beta a\|_{L^1} &\lesssim \sum_{j \geq 0} 2^{-\bar{\epsilon} j} \left(\frac{V(x, 2^j s)}{V(x, 2^j s)} \right)^{1-\frac{1}{p}} \\
&\lesssim 1.
\end{aligned}$$

□

Proposition D.4.2. *Let $\epsilon > 0$, $M \in \mathbb{N}^*$, $p \in (1, 2]$. Then $H^1_{mol, M-\frac{1}{2}, p, \epsilon}(T_\Gamma) \cap L^2(T_\Gamma) \subset E^1_{quad, \frac{1}{2}}(T_\Gamma)$ and*

$$\|f\|_{H^1_{quad,\frac{1}{2}}} \lesssim \|f\|_{H^1_{mol, M-\frac{1}{2}, p, \epsilon}} \qquad \forall f \in H^1_{mol, M-\frac{1}{2}, p, \epsilon}(T_\Gamma) \cap L^2(T_\Gamma).$$

Proof: The proof is similar to the previous one then we will point out only the main differences. Since d^* and P^k are L^1-bounded, it is enough to prove the uniform boundedness of $\|L_{\frac{1}{2}}\Delta^{-\frac{1}{2}}d^*a\|_{L^1}$ when a is a (M,p,ϵ)-molecule.

However, notice that if $a = s^{M-\frac{1}{2}}d\Delta^{M-1}(I+s\Delta)^{-M+\frac{1}{2}}b$ (with s, b associated with a), one has

$$\|L_{\frac{1}{2}}\Delta^{-\frac{1}{2}}d^*a\|_{L^1} = \|L_{\frac{1}{2}}(I-(I+s\Delta)^{-1})^{M-\frac{1}{2}}b\|_{L^1}.$$

We conclude then as in Proposition D.4.1. □

Proposition D.4.3. *The space $E^1_0(\Gamma)$ is continuously embedded in $E^1_{quad,\frac{1}{2}}(\Gamma)$ and*

$$\|f\|_{H^1_{quad,\frac{1}{2}}} \lesssim \|f\|_{E^1_0} \qquad \forall f \in E^1_0(\Gamma).$$

Proof: We refer to subsection D.2.5 for the definition of $E^1_0(\Gamma)$ and of atoms.

Due to the definition of $E^1_0(\Gamma)$, we only need to check that the quantity $\|L_\beta a\|_{L^1}$ is uniformly bounded on atoms. The proof is analogous to the one of Proposition D.4.1, using Proposition D.2.15. □

D.4.2 $E^1_{quad} \subset H^1_{mol} \cap L^2$

Proposition D.4.4. *Let $M \in \mathbb{N}^*$, $\epsilon > 0$ and $\beta > 0$. Then $E^1_{quad,\beta}(\Gamma) \subset H^1_{mol,M,2,\epsilon}(\Gamma) \cap L^2(\Gamma)$ and*

$$\|f\|_{H^1_{mol,M,2,\epsilon}} \lesssim \|f\|_{H^1_{quad,\beta}} \qquad \forall f \in H^1_{quad,\beta}(\Gamma).$$

Proposition D.4.5. *Let $M \in \mathbb{N}^*$, $\epsilon > 0$ and $\beta > 0$. Then $E^1_{quad,\beta}(T_\Gamma) \subset H^1_{mol,M-\frac{1}{2},2,\epsilon}(\Gamma) \cap L^2(\Gamma)$ and*

$$\|f\|_{H^1_{mol,M-\frac{1}{2},2,\epsilon}} \lesssim \|f\|_{H^1_{quad,\beta}} \qquad \forall f \in H^1_{quad,\beta}(T_\Gamma).$$

Proof: The proofs of the two above results are analogous to the ones in subsections C.4.3 and C.4.4, using the atomic decomposition in Theorem (D.3.8) and Propositions D.2.16 and D.2.12.

The use of L^1-L^2 off-diagonal estimates instead of the L^2-L^2 ones enable to simplify the proof (the homogeneous dimension do not need to appear). □

D.4.3 Proof of Theorems D.1.26, D.1.27 and D.1.29

.

Proof: (Theorem D.1.26)

Let $\beta > 0$, $M \in \mathbb{N}^*$, $p \in (1,2]$ and $\epsilon > 0$. Propositions D.4.1 and D.4.4 yield the continuous embeddings

$$H^1_{mol,M,p,\epsilon}(\Gamma) \cap L^2(\Gamma) \subset E^1_{quad,\beta}(\Gamma) \subset H^1_{mol,M,2,\epsilon}(\Gamma) \cap L^2(\Gamma) \subset H^1_{mol,M,p,\epsilon}(\Gamma) \cap L^2(\Gamma).$$

Thus, we deduce

$$H^1_{mol,M,p,\epsilon}(\Gamma) \cap L^2(\Gamma) = E^1_{quad,\beta}(\Gamma) \tag{D.47}$$

with equivalent norms. In particular, $E^1_{quad,\beta}(\Gamma) \subset L^1(\Gamma)$.

Since the space of finite sum of (M,p,ϵ)-molecule is dense in $H^1_{mol,M,p,\epsilon}(\Gamma)$ (see Lemma 4.5 in [BZ08] or Lemma C.3.5), the space $H^1_{mol,M,p,\epsilon}(\Gamma)$ is the completion of $H^1_{mol,M,p,\epsilon}(\Gamma) \cap L^2(\Gamma)$ in L^1. The completion $H^1_{quad,\beta}(\Gamma)$ of $E^1_{quad,\beta}(\Gamma)$ in L^1 exists then too and satisfies

(i) the two sets $H^1_{quad,\beta}(\Gamma)$ and $H^1_{mol,M,p,\epsilon}(\Gamma)$ are equal,

(ii) the norms in $H^1_{quad,\beta}(\Gamma)$ and $H^1_{mol,M,p,\epsilon}(\Gamma)$ are equivalent.

□

Proof: (Theorem D.1.27)

Let $M \in \mathbb{N}^*$, $p \in (1,2]$ and $\epsilon > 0$. Propositions D.4.2 and D.4.5 yield the continuous embeddings

$$H^1_{mol,M-\frac{1}{2},p,\epsilon}(T_\Gamma) \cap L^2(T_\Gamma) \subset E^1_{\frac{1}{2},\beta}(T_\Gamma) \subset H^1_{mol,M-\frac{1}{2},2,\epsilon}(T_\Gamma) \cap L^2(T_\Gamma) \subset H^1_{mol,M-\frac{1}{2},p,\epsilon}(T_\Gamma) \cap L^2(T_\Gamma).$$

from which we deduce the equality of the all the spaces, with equivalent norms.

It follows that the completion of $E^1_{quad,\frac{1}{2}}(T_\Gamma)$ in $L^1(T_\Gamma)$ exists and satisfies, since $H^1_{mol,M-\frac{1}{2},p,\epsilon}(T_\Gamma)$ is the completion of $H^1_{mol,M-\frac{1}{2},p,\epsilon}(T_\Gamma) \cap L^2(T_\Gamma)$ in $L^1(T_\Gamma)$,

(i) the two sets $H^1_{quad,\frac{1}{2}}(T_\Gamma)$ and $H^1_{mol,M-\frac{1}{2},p,\epsilon}(T_\Gamma)$ are equal,

(ii) the norms in $H^1_{quad,\frac{1}{2}}(T_\Gamma)$ and $H^1_{mol,M-\frac{1}{2},p,\epsilon}(T_\Gamma)$ are equivalent.

Moreover, notice that if $F \in H^2(T_\Gamma)$,

$$F \in E^1_{quad,\beta}(T_\Gamma) \Longleftrightarrow \Delta^{-\frac{1}{2}} d^* F \in E^1_{quad,\beta}(\Gamma). \tag{D.48}$$

Indeed, the implication $\Delta^{-\frac{1}{2}} d^* F \in E^1_{quad,\beta}(\Gamma) \Rightarrow F \in E^1_{quad,\beta}(T_\Gamma)$ is obvious, and the converse is due to Proposition D.1.5. Theorem D.1.26 implies that all the spaces $E^1_{quad,\beta}(\Gamma)$, $\beta > 0$, coincide. Together with (D.48), for all $\beta > 0$, the spaces $E^1_{quad,\beta}(T_\Gamma)$ coincide with $E^1_{quad,\frac{1}{2}}(T_\Gamma)$. Hence, for all $\beta > 0$, the completion $H^1_{quad,\beta}(T_\Gamma)$ of $E^1_{quad,\beta}(T_\Gamma)$ in $L^1(T_\Gamma)$ exists and satisfies

(i) the two sets $H^1_{quad,\beta}(T_\Gamma)$ and $H^1_{quad,\frac{1}{2}}(T_\Gamma)$ are equal,

(ii) the norms in $H^1_{quad,\beta}(T_\Gamma)$ and $H^1_{quad,\frac{1}{2}}(T_\Gamma)$ are equivalent.

□

Proof: (Theorem D.1.29)
According to Corollary D.2.19, it suffices to shows that $H^1(\Gamma) = H^1_{mol,1,2,3}(\Gamma)$ is continuously embedded in $L^1(\Gamma)$ and that $E^1_0(\Gamma)$ is continuously embedded in $H^1(\Gamma) = H^1_{quad,1}(\Gamma)$. However, the first embedding is stated in Proposition D.1.20 and the second one is due to Proposition D.4.3. □

D.5 Examples of graph satisfying (DV) and (UE)

In this paragraph, we need to recall some classical definitions on graphs.

A path joining x to y is a sequence $x = x_0, x_1, \dots, x_n = y$ where for any $i \in [\![1, n]\!]$ we have $x_{i-1} \sim x_i$. The length of such path is n. We define then on the graph Γ the "classical" distance $d(x, y)$ as the length of the shortest path joining x to y. We denote by $B_d(x, r)$ and $V_d(x, r)$ respectively the ball and the volume of the ball of center x and of radius r.

Let (Γ, μ) be a weighted graph with the doubling property for the distance d and that satisfy some Gaussian upper estimates of the Markov kernels

$$p_{k-1}(x, y) \lesssim \frac{1}{V_d(x, \sqrt{k})} \exp\left(-c\frac{d^2(x, y)}{k}\right) \qquad \forall x, y \in \Gamma, \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

It is the case, for example, of the Cayley graph of a discrete group with polynomial growth (see [HSC93]).

We define then $\rho(x, y) = d^2(x, y)$ and one can easily check that both (DV) and (UE) are verified. As a consequence, the Riesz transform $\nabla\Delta^{-\frac{1}{2}}$ is L^p bounded on Γ for all $p \in (1, 2]$ and we find again the main result in [Rus00].

The second example are fractal-like graphs, that is doubling graphs where the Markov kernel satisfies some subgaussian estimates such as

$$p_k(x, y) \lesssim \frac{1}{V_d(x, k^{\frac{1}{\beta}})} \exp\left(-c\left[\frac{d^\beta(x, y)}{k}\right]^{\frac{1}{\beta-1}}\right) \qquad \forall x, y \in \Gamma, \forall k \in \mathbb{N}^* \tag{D.49}$$

for some $\beta > 2$. An example of such graphs is the Sierpinski carpets (see [BB99], [Jon96]).

In this case, we choose $\rho(x, y) = \lfloor d^\beta(x, y) \rfloor$, where $\lfloor r \rfloor$ denotes the integer part of $r \in \mathbb{R}_+$. Since the collections of balls induced by ρ and by d coincide, one has

$$V_\rho(x, 2r) = V_d(x, s_2) \text{ and } V_d(x, s_1) = V_\rho(x, r)$$

with for all $i \in \{1, 2\}$, s_i such that $\lfloor s_i^\beta \rfloor \leq ir < \lfloor (s_i + 1)^\beta \rfloor$. Therefore, the assumption (DV) is implied by the fact that d is a doubling metric. Besides, assumption (UE) with $\eta = \frac{1}{\beta-1} \in (0, 1]$ is easily deduced from (D.49).

For our third example, we will present a graph that satisfies (DV) and (UE) for some quasidistance ρ, but where the collections of balls defined with ρ and d do not coincide.

Definition D.5.1. *Let* $(\Gamma_1, \mu^1, \rho_1)$ *and* $(\Gamma_2, \mu^2, \rho_2)$ *be two weighted graphs. The graph* (Γ, μ, ρ) *is the free product of* Γ_1 *and* Γ_2 *if*

(i) $\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2$,

(ii) for all $x = (x_1, x_2) \in \Gamma$ *and* $y = (y_1, y_2) \in \Gamma$, $\mu_{xy} = \mu^1_{x_1 y_1} \mu^2_{x_2 y_2}$,

(iii) for all $x = (x_1, x_2) \in \Gamma$ *and* $y = (y_1, y_2) \in \Gamma$, $\rho(x, y) = \max\{\rho_1(x_1, y_1), \rho_2(x_2, y_2)\}$.

Remark D.5.2. *Let* (Γ, μ, ρ) *be the free product of* $(\Gamma_1, \mu^1, \rho_1)$ *and* $(\Gamma_2, \mu^2, \rho_2)$*. Then the following facts are satisfied*

(i) $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2)$ *if and only if* $x_1 \sim y_1$ *and* $x_1 \sim y_1$.

(ii) If $x \sim y$ *and* $x \neq y$, *then* $\rho(x, y) = 1$.

(iii) $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max\{d(x_1, y_1), d(x_2, y_2)\}$.

Proposition D.5.3. *Let* $(\Gamma_1, \mu^1, \rho_1)$ *and* $(\Gamma_2, \mu^2, \rho_2)$ *satisfying* (LB), (DV) *and* (UE). *Let* (Γ, μ, ρ) *be the graph defined as the free product of* Γ_1 *and* Γ_2. *Then the graph* (Γ, μ, ρ) *satisfies* (LB), (DV) *and* (UE).

Corollary D.5.4. *There exists a graph* (Γ, μ) *satisfying* (LB) *that can be outfitted with a quasidistance* ρ *such that*

- *the graph* (Γ, μ, ρ) *satisfies* (DV) *and* (UE),
- *there does not exist any* $\beta \geq 2$ *such that* $\rho \simeq d^\beta$.

Proof: (Corollary)

Take Γ_1 and Γ_2 two infinite graphs satisfying subgaussian estimates (D.49) with $\beta_1 \neq \beta_2$ (for example $\Gamma_1 = \mathbb{Z}^n$ and Γ_2 is the Sierpinski carpet). Proposition D.5.3 implies that $\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2$ satisfies (LB), (DV) and (UE). Notice then that $\rho((x, y), (x, z)) \simeq d_2^{\beta_2}(y, z) \simeq d^{\beta_2}((x, y), (x, z))$ and $\rho((y, x), (z, x)) \simeq d_1^{\beta_1}(y, z) \simeq d^{\beta_1}((y, x), (z, x))$ □

Proof: (Proposition)

The fact that Γ satisfies (LB) if and only if both Γ_1 and Γ_2 satisfies (LB) is immediate.

By construction, one has $B_\rho(x, k) = B_{\rho_1}(x_1, k) \times B_{\rho_2}(x_2, k)$. As a consequence,

$$V_\rho(x, k) = V_{\rho_1}(x_1, k) V_{\rho_2}(x_2, k)$$

and then assertion (DV) follows from the doubling property of the graphs Γ_1 and Γ_2.

We have by construction $p(x, y) = p^1(x_1, y_1) p^2(x_2, y_2)$. Therefore, by induction, we got $p_k(x, y) = p^1_k(x_1, y_1) p^2_k(x_2, y_2)$. As a consequence,

$$\begin{aligned} p_k(x, y) &\lesssim \frac{1}{V_{\rho_1}(x_1, k) V_{\rho_2}(x_2, k)} \exp\left[-c_1 \left(\frac{\rho_1(x_1, y_1)}{k}\right)^{\eta_1} - c_2 \left(\frac{\rho_2(x_2, y_2)}{k}\right)^{\eta_2}\right] \\ &\lesssim \frac{1}{V_\rho(x, k)} \exp\left[-c \left(\frac{\rho_1(x_1, y_1)}{k}\right)^{\eta} - c \left(\frac{\rho_2(x_2, y_2)}{k}\right)^{\eta}\right] \\ &\leq \frac{1}{V_\rho(x, k)} \exp\left[-c \left(\frac{\rho(x, y)}{k}\right)^{\eta}\right] \end{aligned}$$

where $c = \min\{c_1, c_2\}$ and $\eta = \min\{\eta_1, \eta_2\}$. Thus Γ satisfies (UE).

□

We finish the article with a question:

Question:

Let (Γ, μ, d) be any graph satisfying (LB) (DV). Does there always exist a quasidistance ρ such that (Γ, μ, ρ) satisfies (DV) and (UE)?

Appendix E

Algebra properties for Besov spaces on unimodular Lie groups

E.1 Introduction and statement of the results

E.1.1 Introduction

Let $d \in \mathbb{N}^*$. In $\mathbb{R}^d$, the Besov spaces $B^{p,q}_\alpha(\mathbb{R}^d)$ are obtained by real interpolation of Sobolev spaces and can be defined, for $p, q \in [1, +\infty]$ and $\alpha \in \mathbb{R}$, as the subset of distributions $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ satisfying

$$\|f\|_{B^{p,q}_\alpha} := \|\psi * f\|_{L^p} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left[2^{k\alpha} \|\varphi_k * f\|_{L^p} \right]^q \right)^{\frac{1}{q}} < +\infty \tag{E.1}$$

where, if $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ is supported in $B(0,2)\backslash B(0, \frac{1}{2})$, φ_k and ψ are such that $\mathcal{F}\varphi_k(\xi) = \varphi(2^{-k}\xi)$ and $\mathcal{F}\psi(\xi) = 1 - \sum_{k=1}^\infty \varphi(2^{-k}\xi)$.

The norm of the Besov space $B^{p,q}_\alpha(\mathbb{R}^d)$ can be also written by using the heat operator. Indeed, Triebel proved in [Tri82, Tri92, Section 2.12.2] that for all $p, q \in [1, +\infty]$, all $\alpha > 0$ and all integer $m > \frac{\alpha}{2}$,

$$\|f\|_{B^{p,q}_\alpha} \simeq \|f\|_{L^p} + \left(\int_0^\infty t^{(m-\frac{\alpha}{2})q} \left\| \frac{\partial^M H_t}{\partial t^M} f \right\|_{L^p}^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \tag{E.2}$$

where $H_t = e^{t\Delta}$ is the heat semigroup (generated by $-\Delta$). Note that we can give a similar characterization by using, instead of the heat semigroup, the harmonic extension or another extensions obtained by convolution (see [Usp61, MRre]).

Another characterization in term of functional using differences of functions was done. Define for $M \in \mathbb{N}^*$, $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $x, h \in \mathbb{R}^d$ the term

$$\nabla_h^M f(x) = \sum_{l=0}^{M} \binom{M}{l} (-1)^{M-l} f(x + lh)$$

and then for $M > \alpha > 0$, $p, q \in [1, +\infty]$

$$S^{p,q}_{\alpha,M} f = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |h|^{-\alpha q} \|\nabla_h^M f\|_{L^p}^q \right)^{\frac{1}{q}}. \tag{E.3}$$

We have then for all $\alpha > 0$, $p, q \in [1, +\infty]$ and $M \in \mathbb{N}$ with $M > \alpha$,

$$\|f\|_{B^{p,q}_\alpha} \simeq \|f\|_{L^p} + S^{p,q}_{\alpha,M} f. \tag{E.4}$$

One of the remarkable property of Besov spaces (see [Dan12, Proposition 1.4.3], [Run86, Theorem 2, p. 336], [MRre, Proposition 6.2]) is that $B^{p,q}_\alpha(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$ is an algebra for the pointwise product, that is for all $\alpha > 0$, all $p, q \in [1, +\infty]$, one has

$$\|fg\|_{B^{p,q}_\alpha} \lesssim \|f\|_{B^{p,q}_\alpha} \|g\|_{L^\infty} + \|f\|_{L^\infty} \|g\|_{B^{p,q}_\alpha}. \tag{E.5}$$

The idea of [Dan12] consists in decomposing the product fg by some paraproducts. The authors of [MRre] wrote $B_\alpha^{p,q}(\mathbb{R}^d)$ as a trace of some weighted (non fractional) Sobolev spaces, and thus deduced the algebra property $B_\alpha^{p,q}(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$ from the one of $W^{p,k}(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Notice also that, when $\alpha \in (0,1)$ and $M = 1$, the algebra property of $B_\alpha^{p,q}(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$ is a simple consequence of (E.4).

The property (E.5) have also been studied in the more general setting of Besov spaces on Lie groups. Gallagher and Sire stated in [GS12] an algebra property for Besov spaces on H-type groups, which are a subclass of Carnot groups. In order to do this, they used a some paradifferential calculus and a Fourier transform adapted to H-groups.

Moreover, in the more general case where G is a unimodular Lie group with polynomial growth, they used the definition of Besov spaces obtained using Littlewood-Paley decomposition proved in [FMV06]. When $\alpha \in (0,1)$, they proved a equivalence of the Besov norms with some functionals using differences of functions, in the spirit of (E.3), and thus they obtained an algebra property for $B_\alpha^{p,q}(G) \cap L^\infty(G)$. They shows a recursive definition of Besov spaces and wanted to use it to extend the property (E.5) to $\alpha \geq 1$. However, it seems to us that there is a small gap in their proof and they actually proved the property $\|fg\|_{B_\alpha^{p,q}} \lesssim (\|f\|_{B_\alpha^{p,q}} + \|f\|_{L^\infty})(\|g\|_{B_\alpha^{p,q}} + \|g\|_{L^\infty})$.

In our paper, we defined Besov spaces on unimodular Lie group (that can be of exponential growth) for all $\alpha > 0$, and then we proved an algebra property on them. We used two approaches. One with functionals in the spirit of (E.3) and the other one using paraproducts. We did not state any results on homogeneous Besov spaces because the definition of these spaces need a particular work (a extension of the work in [BDY12] to $\alpha \notin (-1,1)$ should work). However, we have no doubt that our methods work once we get the proper definition of homogeneous Besov spaces with some good Calderón-Zygmund formulas.

Note that methods used in [GS12] or in the present paper are similar to the ones in [CRTN01] and [BBR12], where fractional Sobolev spaces $L^p_\alpha(G)$ are considered on unimodular Lie groups (and on Riemannian manifolds). In these two last articles, the authors proved the algebra property for $L^p_\alpha(G) \cap L^\infty(G)$ when $p \in (1,+\infty)$ and $\alpha > 0$.

E.1.2 Lie group structure

In this paper, G is a unimodular connected Lie group endowed with its Haar measure dx. We recall that "unimodular" means that dx is both left- and right-invariant. We denote by $\mathcal{L}$ the Lie algebra of G and we consider a family $\mathbb{X} = \{X_1, \dots, X_k\}$ of left-invariant vector fields on G satisfying the Hörmander condition (which means that the Lie algebra generated by the family $\mathbb{X}$ is $\mathcal{L}$). Denote for $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $\mathcal{I}_n(\mathbb{N}) = \bigcup\limits_{l \leq n} \{1, \dots, k\}^l$. Then if $I = (i_1, \dots, i_n) \in \mathcal{I}_\infty(\mathbb{N})$, the length of I will be denoted by $|I|$ and is equal to n, whereas X_I denotes the vector field $X_{i_1} \dots X_{i_n}$.

A standard metric, called the Carnot-Caratheodory metric, is naturally associated with $(G, \mathbb{X})$ and is defined as follows. Let $l : [0,1] \to G$ be an absolutely continuous path. We say that l is admissible if there exist measurable functions $a_1, \dots, a_k : [0,1] \to \mathbb{C}$ such that

$$l'(t) = \sum_{i=1}^k a_i(t) X_i(l(t)) \qquad \text{for a.e. } t \in [0,1].$$

If l is admissible, its length is defined by $|l| = \displaystyle\int_0^1 \left(\sum_{i=0}^k |a_i(t)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} dt$. For any $x, y \in G$, the distance $d(x,y)$ between x and y is then the infimum of the lengths of all admissible curves joining x to y (such a curve exists thanks to the Hörmander condition). The left-invariance of the X_i's implies the left-invariance of d. For short, $|x|$ denotes the distance between the neutral e and x, and therefore $d(x,y) = |y^{-1}x|$ for all x and y in G.

For $r > 0$ and $x \in G$, we denote by $B(x,r)$ the open ball with respect to the Carnot-Caratheodory metric centered at x and of radius r. Define also by $V(r)$ the Haar measure of any ball of radius r.

From now and abusively, we will write G for $(G, \mathbb{X}, d, dx)$. Recall that G has a local dimension (see [NSW85]):

Proposition E.1.1. *Let G be a unimodular Lie group and $\mathbb{X}$ be a family of left-invariant vector fields satisfying the Hörmander condition. Then G has the local doubling property, that is there exists $C > 0$ such that*

$$V(2r) \leq CV(r) \qquad \forall 0 < r \leq 1.$$

More precisely, there exist $d \in \mathbb{N}^*$ and $c, C > 0$ such that

$$cr^d \leq V(r) \leq Cr^d \qquad \forall 0 < r \leq 1.$$

For balls with radius bigger than 1, we have the result of Guivarc'h (see [Gui73]):

Proposition E.1.2. *If G is a unimodular Lie group, only two situations may occur.*
Either G has polynomial growth and there exist $D \in \mathbb{N}^*$ and $c, C > 0$ such that

$$cr^D \leq V(r) \leq Cr^D \qquad \forall r \geq 1,$$

or G has exponential growth and there exist $c_1, c_2, C_1, C_2 > 0$ such that

$$c_1 e^{c_2 r} \leq V(r) \leq C_1 e^{C_2 r} \qquad \forall r \geq 1.$$

We consider the positive sublaplacian Δ on G defined by

$$\Delta = -\sum_{i=1}^{k} X_i^2.$$

We will denote by $H_t = e^{-t\Delta}$ the heat semigroup on G associated with Δ.

E.1.3 Definition of Besov spaces

Definition E.1.3. *Let G be a unimodular Lie group. We define the Schwartz space $\mathcal{S}(G)$ as the space of functions $\varphi \in C^\infty(G)$ where all the seminorms*

$$N_{I,c}(\varphi) = \sup_{x \in G} e^{c|x|} |X_I \varphi(x)| \qquad c \in \mathbb{N},\, I \in \mathcal{I}_\infty(\mathbb{N})$$

are finite.
The space $\mathcal{S}'(G)$ is defined as the dual space of $S(G)$.

Remark E.1.4. *Note that we have the inclusion $\mathcal{S}(G) \subset L^p(G)$ for any $p \in [1, +\infty]$. As a consequence, $L^p(G) \subset \mathcal{S}'(G)$.*

Definition E.1.5. *Let G be a unimodular Lie group and let $\alpha \geq 0$, $p, q \in [1, +\infty]$. The space $f \in B_\alpha^{p,q}(G)$ is defined as the subspace of $\mathcal{S}'(G)$ made of distributions f such that, for all $t \in (0,1)$, $\Delta^m H_t f \in L^p(G)$ and satisfying*

$$\|f\|_{B_\alpha^{p,q}} := \Lambda_\alpha^{p,q} f + \|H_{\frac{1}{2}} f\|_p < +\infty,$$

where

$$\Lambda_\alpha^{p,q} f := \left(\int_0^1 \left(t^{m-\frac{\alpha}{2}} \left\| \Delta^m H_t f \right\|_p \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}}$$

if $q < +\infty$ (with the usual modification if $q = +\infty$) and m stands for the only integer such that $\frac{\alpha}{2} < m \leq \frac{\alpha}{2} + 1$.

Remark E.1.6. *Lemma E.2.6 provides that the heat kernel h_t is in $\mathcal{S}(G)$ for all $t > 0$. Thus $H_t \varphi \in \mathcal{S}(G)$ whenever $t > 0$ and $\varphi \in \mathcal{S}(G)$. When $f \in \mathcal{S}'(G)$, the term $X_I H_t f$ denotes the distribution in $\mathcal{S}'(G)$ defined by*

$$\langle X_I H_t f, \varphi \rangle = (-1)^{|I|} \langle f, H_t X_I \varphi \rangle \qquad \forall \varphi \in \mathcal{S}(G).$$

E.1.4 Statement of the results

Proposition E.1.7. *Let G be a unimodular Lie group. The one has for all $p \in [1,+\infty]$, all multi indexes $I \in \mathcal{I}_\infty(\mathbb{N})$ and all $t \in (0,1)$,*

$$\|X_I H_t f\|_p \leq C_I t^{-\frac{|I|}{2}} \|f\|_p \qquad \forall f \in L^p(G)\,.$$

Remark E.1.8. *In particular, one has that $\|t\Delta H_t\|_p \lesssim 1$ once $t \in (0,1)$ and for all $p \in [1,+\infty]$. When $p \in (1,+\infty)$, since Δ is analytic on L^2 (and thus on L^p), we actually have $\|t\Delta H_t\|_p \lesssim 1$ for all $t > 0$. The case*

The following result gives equivalent definitions of the Besov spaces $B^{p,q}_\alpha$ only involving the Laplacian.

Theorem E.1.9. *Let G be a unimodular Lie group and $p,q \in [1,+\infty]$ and $\alpha \geq 0$.*

If $m > \frac{\alpha}{2}$ and t_0 a real in $\begin{cases} (0,1) & \text{if } \alpha = 0 \\ [0,1) & \text{if } \alpha > 0 \end{cases}$, then the following norms are equivalent to the norm of $B^{p,q}_\alpha(G)$.

(i) $\left(\int_0^1 \left(t^{m-\frac{\alpha}{2}} \|\Delta^m H_t f\|_p\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} + \|H_{t_0} f\|_p$.

(ii) $\|H_{t_0} f\|_p + \left(\sum_{j\leq -1} \left[2^{j(m-\frac{\alpha}{2})} \|\Delta^m H_{2^j} f\|_p\right]^q\right)^{\frac{1}{q}}$.

(iii) $\|H_{t_0} f\|_p + \left(\sum_{j\leq -1} \left[2^{-j\frac{\alpha}{2}} \left\|\int_{2^j}^{2^{j+1}} |(t\Delta)^m H_t f| \frac{dt}{t}\right\|_p\right]^q\right)^{\frac{1}{q}}$

if we assume that $\alpha > 0$.

Remark E.1.10. *Here and after, we say that "a norm N is equivalent to the norm in $B^{p,q}_\alpha$" if and only if the space of distributions $f \in \mathcal{S}'$ such that $\Delta^m H_t f$ is a locally integrable function in G for all $t > 0$ and $N(f) < +\infty$ coincides with $B^{p,q}_\alpha$ and the norm N is equivalent to $\|\cdot\|_{B^{p,q}_\alpha}$.*

The previous theorem allows us to recover some well known facts about Besov spaces in $\mathbb{R}^d$.

Corollary E.1.11. *[Embeddings] Let G a unimodular Lie group, $p,q,r \in [1,+\infty]$ and $\alpha \geq 0$. We have the following continuous embedding*

$$B^{p,q}_\alpha(G) \subset B^{p,r}_\alpha(G)$$

once $q \leq r$.

Corollary E.1.12. *[Interpolation]*

Let G be a unimodular Lie group. Let $s_0, s_1 \geq 0$ and $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$.
Define

$$s^* = (1-\theta)s_0 + \theta s_1$$
$$\frac{1}{p^*} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$$
$$\frac{1}{q^*} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

The Besov spaces form a scale of interpolation for the complex method, that is, if $s_0 \neq s_1$,

$$(B^{p_0,q_0}_{s_0}, B^{p_1,q_1}_{s_1})_{[\theta]} = B^{p^*,q^*}_{s^*}.$$

The following result is another characterization of Besov spaces, using explicitly the family of vector fields $\mathbb{X}$.

Theorem E.1.13. *Let G be a unimodular Lie group, $p, q \in [1, +\infty]$ and $\alpha > 0$. Let $\bar{m}$ be an integer strictly greater than α. Then*

$$\|H_{\frac{1}{2}} f\|_p + \left(\sum_{j \le -1} \left[2^{j \frac{\bar{m}-\alpha}{2}} \max_{t \in [2^j, 2^{j+1}]} \sup_{|I| \le \bar{m}} \|X_I H_t f\|_p \right]^q \right)^{\frac{1}{q}} \tag{E.6}$$

is an equivalent norm in $B^{p,q}_\alpha(G)$.

With the use of paraproducts, we can deduce from Corollary E.1.12 and Theorem E.1.13 the complete following Leibniz rule.

Theorem E.1.14. *Let G be a unimodular Lie group, $0 < \alpha$ and $p, p_1, p_2, p_3, p_4, q \in [1, +\infty]$ such that*

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_4} = \frac{1}{p}.$$

Then for all $f \in B^{p_1,q}_\alpha \cap L^{p_3}$ and all $g \in B^{p_4,q}_\alpha \cap L^{p_2}$, one has

$$\|fg\|_{B^{p,q}_\alpha} \lesssim \|f\|_{B^{p_1,q}_\alpha} \|g\|_{L^{p_2}} + \|f\|_{L^{p_3}} \|g\|_{B^{p_4,q}_\alpha}. \tag{E.7}$$

Remark E.1.15. *The Leibniz rule implies that $B^{p,q}_\alpha(G) \cap L^\infty(G)$ is an algebra under pointwise product, that is*

$$\|fg\|_{B^{p,q}_\alpha} \lesssim \|f\|_{B^{p,q}_\alpha} \|g\|_{L^\infty} + \|f\|_{L^\infty} \|g\|_{B^{p,q}_\alpha}.$$

Let us state another characterization of $B^{p,q}_\alpha$ in term of functionals using differences of functions.

Define $\nabla_y f(x) = f(xy) - f(x)$ for all functions f on G and all $x, y \in G$. Consider the following sublinear functional

$$L^{p,q}_\alpha(f) = \left(\int_{|y| \le 1} \left(\frac{\|\nabla_y f\|_p}{|y|^\alpha} \right)^q \frac{dy}{V(|y|)} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Theorem E.1.16. *Let G be a unimodular Lie group. Let $p, q \in [1, +\infty]$. Then for all $f \in L^p(G)$,*

$$L^{p,q}_\alpha(f) + \|f\|_p \simeq \Lambda^{p,q}_\alpha(f) + \|f\|_p$$

once $\alpha \in (0, 1)$.

Remark E.1.17. *When G has polynomial volume growth, Theorem E.1.16 is the inhomogeneous counterpart of Theorem 2 in [SC90]. Note that this statement is new when G has exponential volume growth.*

Remark E.1.18. *From Theorem E.1.16, we can deduce the Leibniz rule stated in Theorem E.1.14 in the case $\alpha \in (0, 1)$.*

As Sobolev spaces, Besov spaces can be characterized recursively.

Theorem E.1.19. *Let G be a unimodular Lie group. Let $p, q \in [1, +\infty]$ and $\alpha > 0$. Then*

$$f \in B^{p,q}_{\alpha+1}(G) \Leftrightarrow \forall i,\ X_i f \in B^{p,q}_\alpha(G) \text{ and } f \in L^p(G).$$

Remark E.1.20. *Note that a similar statement is established in [GS12]. However, we prove this fact for $p \in [1, +\infty]$ while the authors of [GS12] used the boundedness of the Riesz transforms and thus are restricted to $p \in (1, +\infty)$.*

E.2 Estimates of the heat semigroup

E.2.1 Preliminaries

The following lemma is easily checked:

Lemma E.2.1. *Let (A, dx) and (B, dy) be two measured spaces. Let $K(x,y) : A \times B \to \mathbb{R}_+$ be such that*

$$\sup_{x\in A} \int_B K(x,y)dy \leq C_B$$

and

$$\sup_{y\in B} \int_A K(x,y)dx \leq C_A.$$

Let $q \in [1, +\infty]$. Then for all $f \in L^q(B)$

$$\left(\int_A \left|\int_B K(x,y)f(y)dy\right|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq C_B^{1-\frac{1}{q}} C_A^{\frac{1}{q}} \|f\|_q,$$

with obvious modifications when $q = +\infty$.

Lemma E.2.2. *Let $(a, b) \in (\mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\})^2$ such that $a < b$, $0 < \alpha < \beta$ two real numbers and $q \in [1, +\infty]$. Then there exists $C_{\alpha,\beta} > 0$ such that for any sequence $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, one has*

$$\sum_{j=a}^{b} \left[2^{j\alpha} \sum_{n=a}^{b} 2^{-\max\{n,j\}\beta} c_n\right]^q \lesssim \sum_{n=a}^{b} \left[2^{(\alpha-\beta)n} c_n\right]^q.$$

Proof: We have

$$\sum_{j=a}^{b} \left[2^{j\alpha} \sum_{n=a}^{b} 2^{-\max\{n,j\}\beta} c_n\right]^q = \sum_{j=a}^{b} \left[\sum_{n=a}^{b} K(n,j) d_n\right]^q$$

with $d_n = 2^{n(\alpha-\beta)} c_n$ and $K(n,j) = 2^{(j-n)\alpha} 2^{(n-\max\{j,n\})\beta}$.

According to Lemma E.2.1, one has to check that

$$\sup_{j\in[\![a,b]\!]} \sum_{n=a}^{b} K(n,j) \lesssim 1$$

and

$$\sup_{n\in[\![a,b]\!]} \sum_{j=a}^{b} K(n,j) \lesssim 1.$$

For the first estimate, check that

$$\begin{aligned}
\sup_{j\in[\![a,b]\!]} \sum_{n=a}^{b} K(n,j) &= \sup_{j\in[\![a,b]\!]} \left[2^{j(\alpha-\beta)} \sum_{n=a}^{j} 2^{n(\beta-\alpha)} + 2^{j\alpha} \sum_{n=j+1}^{b} 2^{-n\alpha}\right] \\
&\leq \sup_{j\in\mathbb{Z}} \left[2^{j(\alpha-\beta)} \sum_{n=-\infty}^{j} 2^{n(\beta-\alpha)} + 2^{j\alpha} \sum_{n=j+1}^{+\infty} 2^{-n\alpha}\right] \\
&\lesssim 1,
\end{aligned}$$

since $\beta - \alpha > 0$ and $\alpha > 0$.

The second estimate can be checked similarly:

$$\begin{aligned}
\sup_{n\in[\![a,b]\!]} \sum_{j=a}^{b} K(n,j) &= \sup_{j\in[\![a,b]\!]} \left[2^{-n\alpha} \sum_{j=a}^{n} 2^{j\alpha} + 2^{n(\beta-\alpha)} \sum_{j=n+1}^{b} 2^{j(\alpha-\beta)}\right] \\
&\lesssim 1.
\end{aligned}$$

□

Proposition E.2.3. *Let $s \geq 0$ and $c > 0$. Define, for all $t \in (0,1)$ and all $x, y \in G$,*

$$K_t(x,y) = \left(\frac{|y^{-1}x|^2}{t}\right)^s \frac{1}{V(\sqrt{t})} e^{-c\frac{|y^{-1}x|^2}{t}}.$$

Then, for all $q \in [1, +\infty]$,

$$\left(\int_G \left(\int_G K_t(x,y) g(y) dy\right)^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \lesssim \|g\|_q.$$

Proof: Let us check that the assumptions of Lemma E.2.1 are satisfied. For all $x \in G$ and all $t \in (0,1)$,

$$\begin{aligned}
\int_G K_t(x,y)dy &= \frac{1}{V(\sqrt{t})} \int_G \left(\frac{|y^{-1}x|^2}{t}\right)^s e^{-c\frac{|y^{-1}x|^2}{t}} dy \\
&= \frac{1}{V(\sqrt{t})} \int_{|y^{-1}x|^2 < t} \left(\frac{|y^{-1}x|^2}{t}\right)^s e^{-c\frac{|y^{-1}x|^2}{t}} dy \\
&\quad + \frac{1}{V(\sqrt{t})} \int_{|y^{-1}x|^2 \geq t} \left(\frac{|y^{-1}x|^2}{t}\right)^s e^{-c\frac{|y^{-1}x|^2}{t}} dy \\
&= I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

The term I_1 is easily dominated by 1. As for I_2, it is estimated as follows:

$$\begin{aligned}
I_2 &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{V(\sqrt{t})} \int_{2^j\sqrt{t} \leq |y^{-1}x| < 2^{j+1}\sqrt{t}} \left(\frac{|y^{-1}x|^2}{t}\right)^s e^{-c\frac{|y^{-1}x|^2}{t}} dy \\
&\lesssim \sum_{j=0}^{\infty} \frac{V(2^{j+1}\sqrt{t})}{V(\sqrt{t})} 4^{js} e^{-c4^j}.
\end{aligned}$$

Notice that Propositions E.1.1 and E.1.2 imply that $\frac{V(2^{j+1}\sqrt{t})}{V(\sqrt{t})} \lesssim 2^{jd}$ if $2^j\sqrt{t} \leq 1$ and

$$\frac{V(2^{j+1}\sqrt{t})}{V(\sqrt{t})} = \frac{V(2^{j+1}\sqrt{t})}{V(1)} \frac{V(1)}{V(\sqrt{t})} \lesssim e^{C2^j} 2^{jd} \tag{E.8}$$

if $2^j\sqrt{t} \geq 1$. Hence,

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{V(2^{j+1}\sqrt{t})}{V(\sqrt{t})} 4^{js} e^{-c4^j} \lesssim \sum_{j=0}^{\infty} e^{-c'4^j} \lesssim 1,$$

which yields with the uniform estimate

$$\int_G K_t(x,y)dy \lesssim 1. \tag{E.9}$$

In the same way, one has

$$\int_G K_t(x,y)dx \lesssim 1.$$

Lemma E.2.1 provides then the desired result. □

Proposition E.2.4. *Let $s \geq 0$ and $c > 0$. Define*

$$K(t,y) = \left(\frac{|y|^2}{t}\right)^s \frac{V(|y|)}{V(\sqrt{t})} e^{-c\frac{|y|^2}{t}}.$$

Then, for all $q \in [1, +\infty]$,

$$\left(\int_0^1 \left(\int_G K(t,y) g(y) dy\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \lesssim \left(\int_G |g(y)| \frac{dy}{V(|y|)}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Proof: Let us check again that the assumptions of Lemma E.2.1 are satisfied, that are in our case

$$\sup_{t\in(0,1)} \int_G K(t,y)dy \le C_B$$

and

$$\sup_{y\in G} \int_0^1 K(t,y)\frac{dt}{t} \le C_A.$$

The first one is exactly as the estimate (E.9).For the second one, check that

$$\begin{aligned}
\int_0^1 K(t,y)\frac{dt}{t} &= \int_0^1 \frac{V(|y|)}{V(\sqrt{t})}\left(\frac{|y|^2}{t}\right)^s e^{-c'\frac{|y|^2}{t}}\frac{dt}{t} \\
&\lesssim \int_0^{|y|^2} \frac{V(|y|)}{V(\sqrt{t})}\left(\frac{|y|^2}{t}\right)^s e^{-c'\frac{|y|^2}{t}}\frac{dt}{t} + \int_{|y|^2}^{\infty}\left(\frac{|y|^2}{t}\right)^s\frac{dt}{t} \\
&\lesssim \sum_{j=0}^{+\infty}\int_{4^{-(j+1)}|y|^2}^{4^{-j}|y|^2} \frac{V(|y|)}{V(\sqrt{t})}\left(\frac{|y|^2}{t}\right)^s e^{-c'\frac{|y|^2}{t}}\frac{dt}{t} + 1 \\
&\lesssim \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{V(|y|)}{V(2^{-j+1}|y|)} 4^{js}e^{-c4^j} + 1 \\
&\lesssim \sum_{j=0}^{+\infty} 2^{j(d+2s)}e^{C2^j}e^{-c4^j} + 1 \\
&\lesssim 1,
\end{aligned}$$

where the last but one line is obtained with the estimate (E.8). □

E.2.2 Estimates for the semigroup

Because of left-invariance of Δ and hypoellipticity of $\frac{\partial}{\partial t} + \Delta$, $H_t = e^{-t\Delta}$ has a convolution kernel $h_t \in C^\infty(G)$ satisfying, for all $f \in L^1(G)$ and all $x \in G$,

$$H_t f(x) = \int_G h_t(y^{-1}x)f(y)dy = \int_G h_t(y)f(xy)dy = \int_G h_t(y)f(xy^{-1})dy.$$

The kernel h_t satisfies the following pointwise estimates.

Proposition E.2.5. *Let G be a unimodular Lie group. For all $I \in \mathcal{I}_\infty(\mathbb{N})$, there exist$C_I, c_I > 0$ such that for all $x \in G$, all $t \in (0,1]$, one has*

$$|X_I h_t(x)| \le \frac{C_I}{t^{\frac{|I|}{2}}V(\sqrt{t})}\exp\left(-c_I\frac{|x|^2}{t}\right).$$

Proof: It is a straightforward consequence of Theorems VIII.2.4, VIII.4.3 and V.4.2. in [VSCC92]. □

Lemma E.2.6. *Let G be a unimodular group. Then $h_t \in \mathcal{S}(G)$ for all $t > 0$.*

Proof: The case $t < 1$ is a consequence of the estimates on h_t. For $t \ge 1$, just notice that $\mathcal{S}(G) * \mathcal{S}(G) \subset \mathcal{S}(G)$. □

Proposition E.2.7. *For all $I \in \mathcal{I}_\infty(\mathbb{N})$ and all $p \in [1, +\infty]$, one has*

$$\|X_I H_t f\|_p \lesssim t^{-\frac{|I|}{2}}\|f\|_p \qquad \forall t \in (0,1], \forall f \in L^p(G).$$

Proof: Proposition E.2.5 yields for any $t \in (0,1]$

$$\|X_I H_t f\|_p \lesssim t^{-\frac{|I|}{2}}\left(\int_G\left|\int_G K_t(x,y)f(y)dy\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

where $K_t(x,y) = \frac{1}{V(\sqrt{t})}\exp\left(-c\frac{|y^{-1}x|^2}{t}\right)$.

The conclusion of Proposition E.2.7 is an immediate consequence of Proposition E.2.3. □

E.3 Littlewood-Paley decomposition

We need a Littlewood-Paley decomposition adapted to this context. In [GS12], the authors used the Littlewood-Paley decomposition proven in [FMV06, Proposition 4.1], only established in the case of polynomial volume growth. We state here a slightly different version of the Littlewood-Paley decomposition, also valid for the case of exponential volume growth.

Lemma E.3.1. *Let G be a unimodular group and let $m \in \mathbb{N}^*$. For any $\varphi \in \mathcal{S}(G)$ and any $f \in \mathcal{S}'(G)$, one has the identities*

$$\varphi = \frac{1}{(m-1)!} \int_0^1 (t\Delta)^m H_t \varphi \frac{dt}{t} + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} \Delta^k H_1 \varphi$$

where the integral converges in $\mathcal{S}(G)$, and

$$f = \frac{1}{(m-1)!} \int_0^1 (t\Delta)^m H_t f \frac{dt}{t} + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} \Delta^k H_1 f$$

where the integral converges in $\mathcal{S}'(G)$.

Proof: We only have to prove the first identity since the second one can be obtained by duality.

Let $\varphi \in \mathcal{S}(G)$. Check first the formula

$$(m-1)! = \int_0^{+\infty} (tu)^m e^{-tu} \frac{dt}{t} = \int_0^1 (tu)^m e^{-tu} \frac{dt}{t} + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(m-1)!}{k!} u^k e^{-u}.$$

Thus by functional calculus, since $\varphi \subset L^2(G)$, one has

$$\varphi = \frac{1}{(m-1)!} \int_0^1 (t\Delta)^m H_t \varphi \frac{dt}{t} + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} \Delta^k H_1 \varphi, \tag{E.10}$$

where the integral converges in $L^2(G)$. Since the kernel h_t of H_t is in $\mathcal{S}(G)$ for any $t > 0$ (see Lemma E.2.6), the formula (E.10) will be proven if we have for any $c \in \mathbb{N}$ and any $I \in \mathcal{I}_\infty(\mathbb{N})$,

$$\lim_{u \to 0} N_{I,c} \left(\int_0^u (t\Delta)^m H_t \varphi \frac{dt}{t} \right) = 0. \tag{E.11}$$

Let $n > \frac{|I|}{2}$ be an integer. Similarly to (E.10), one has for all $x \in G$ and all $t \in (0,1)$,

$$H_t \varphi(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_t^1 (v-t)^{n-1} \Delta^n H_v \varphi(x) dv + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} (1-t)^k \Delta^k H_1 \varphi(x).$$

Hence, for all $x \in G$ and all $u \in (0,1)$, we have the identity

$$\int_0^u (t\Delta)^m H_t \varphi(x) \frac{dt}{t} = \frac{1}{(n-1)!} \int_t^1 \Delta^{n+m} H_v \varphi(x) \left(\int_0^{\min\{u,v\}} t^{m-1} (v-t)^{n-1} dt \right) dv$$
$$+ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \Delta^{k+m} H_1 \varphi(x) \int_0^u t^{m-1} (1-t)^k dt.$$

Note that

$$\int_0^{\min\{u,v\}} t^{m-1} (v-t)^{n-1} dt \lesssim u^m v^{n-1}$$

and

$$\int_0^u t^{m-1} (1-t)^k dt \lesssim u^m.$$

Therefore, the Schwartz seminorms of $\int_0^u (t\Delta)^m H_t\varphi \frac{dt}{t}$ can be estimated by

$$N_{I,c}\left(\int_0^u (t\Delta)^m H_t\varphi \frac{dt}{t}\right) \lesssim u^m \int_0^1 v^{n-1} \sup_{x\in G} e^{c|x|}|X_I\Delta^{m+n}H_v\varphi(x)|dv \\ + u^m \sum_{k=0}^{n-1} \sup_{x\in G} e^{c|x|}|X_I\Delta^{k+m}H_1\varphi(x)|. \tag{E.12}$$

Check then that for all $w \in (0,1]$ and all $l \in \mathbb{N}$, we have

$$\begin{aligned}\sup_{x\in G} e^{c|x|}|X_I\Delta^l H_w\varphi(x)| &= \sup_{x\in G} e^{c|x|}\left|X_I H_w\Delta^l\varphi(x)\right| \\ &\leq \sup_{x\in G} e^{c|x|}\int_G \left|X_I h_w(y^{-1}x)\right| |\Delta^l\varphi(y)|dy \\ &\lesssim \sup_{x\in G}\int_G e^{c|y^{-1}x|}\left|X_I h_w(y^{-1}x)\right| e^{c|y|}|\Delta^l\varphi(y)|dy \\ &\lesssim \left(\sup_{x\in G}\int_G e^{c|y^{-1}x|}\left|X_I h_w(y^{-1}x)\right| dy\right)\sum_{|I|=2l} N_{I,c}(\varphi)\end{aligned} \tag{E.13}$$

where the third line holds because $|x| \leq \left|y^{-1}x\right| + |x|$.
However, for all $x \in G$ and all $w \in (0,1]$, Proposition E.2.5 yields that, for all $x \in G$,

$$\begin{aligned}\int_G e^{c|y^{-1}x|}\left|X_I h_w(y^{-1}x)\right| dy &\lesssim w^{-\frac{|I|}{2}}\frac{1}{V(\sqrt{w})}\int_G e^{c|y^{-1}x|}e^{-c'\frac{|y^{-1}x|^2}{w}}dy \\ &\lesssim w^{-\frac{|I|}{2}}\frac{1}{V(\sqrt{w})}\int_G e^{-c'\frac{|y^{-1}x|^2}{2w}}dy \\ &\lesssim w^{-\frac{|I|}{2}}.\end{aligned} \tag{E.14}$$

By gathering the estimates (E.12), (E.13) and (E.14), we obtain

$$\begin{aligned}N_{I,c}\left(\int_0^u (t\Delta)^m H_t\varphi \frac{dt}{t}\right) &\lesssim u^m\left[\sum_{|I|\leq 2(m+n)} N_{I,c}(\varphi)\right]\left[\int_0^1 v^{n-1}v^{-\frac{|I|}{2}}dv + \sum_{k=0}^{n-1} 1\right] \\ &\lesssim u^m \sum_{|I|\leq 2(m+n)} N_{I,c}(\varphi) \\ &\xrightarrow{u\to 0} 0,\end{aligned}$$

which proves (E.11) and finishes the proof. $\square$

E.4 Proof of Theorem E.1.9 and of its corollaries

E.4.1 Proof of Theorem E.1.9

In this section, we will always assume that $\alpha \geq 0$, $p, q \in [1,+\infty]$.

Proposition E.4.1. *For all $t_1, t_0 \in (0,1)$ and all integers $m > \frac{\alpha}{2}$,*

$$\|f\|_p \lesssim \|H_{t_0}f\|_p + \left(\int_0^1 \left(t^{m-\frac{\alpha}{2}}\|\Delta^m H_t f\|_p\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \qquad \forall f \in \mathcal{S}'(G)$$

when $\alpha > 0$ and

$$\|H_{t_1}f\|_p \lesssim \|H_{t_0}f\|_p + \left(\int_0^1 \left(t^{m-\frac{\alpha}{2}}\|\Delta^m H_t f\|_p\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \qquad \forall f \in \mathcal{S}'(G)$$

when $\alpha \geq 0$ and $q < +\infty$, with the usual modification when $q = +\infty$.

Proof: Lemma E.3.1 (recall that $L^p(G) \subset \mathcal{S}'(G)$) yields the estimate

$$\|f\|_p \lesssim \int_0^1 t^m \|\Delta^m H_t f\|_p \frac{dt}{t} + \sum_{k=0}^{m-1} \|\Delta^k H_1 f\|_p.$$

However, for all $k \in \mathbb{N}$, $\|\Delta^k H_1 f\|_p \leq \frac{C}{(1-t_0)^k} \|H_{t_0} f\|_p$. Then, when $\alpha > 0$,

$$\begin{aligned}
\|f\|_p &\lesssim \int_0^1 t^m \left\|\Delta^m H_t f\right\|_p \frac{dt}{t} + \|H_{t_0} f\|_p \\
&\lesssim \left(\int_0^1 \left(t^{m-\frac{\alpha}{2}} \left\|\Delta^m H_t f\right\|_p \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 t^{\frac{q'\alpha}{2}} \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q'}} + \|H_{t_0} f\|_p \\
&\lesssim \left(\int_0^1 \left(t^{m-\frac{\alpha}{2}} \left\|\Delta^m H_t f\right\|_p \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} + \|H_{t_0} f\|_p,
\end{aligned}$$

which prove the case $\alpha > 0$.

If $\alpha = 0$, Lemma E.3.1 for the integer $m+1$ implies

$$\begin{aligned}
\|H_{t_1} f\|_p &\lesssim \int_0^1 t^{m+1} \left\|\Delta^{m+1} H_{t+t_1} f\right\|_p \frac{dt}{t} + \sum_{k=0}^{m} \|\Delta^k H_{1+t_1} f\|_p \\
&\lesssim \int_0^1 \frac{t^{m+1}}{t_1} \left\|\Delta^m H_t f\right\|_p \frac{dt}{t} + \|H_{t_0} f\|_p \\
&\lesssim \left(\int_0^1 \left(t^m \left\|\Delta^m H_t f\right\|_p \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 \left(\frac{t}{t_1} \right)^{q'} \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q'}} + \|H_{t_0} f\|_p \\
&\lesssim \left(\int_0^1 \left(t^m \left\|\Delta^m H_t f\right\|_p \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} + \|H_{t_0} f\|_p.
\end{aligned}$$

□

Proposition E.4.2. *For all integers $m > \frac{\alpha}{2}$,*

$$\left(\int_0^1 \left(t^{m-\frac{\alpha}{2}} \left\|\Delta^m H_t f\right\|_p \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \lesssim \|f\|_p + \left(\int_0^1 \left(t^{m+1-\frac{\alpha}{2}} \left\|\Delta^{m+1} H_t f\right\|_p \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Proof: We use Lemma E.3.1 and get

$$\Delta^m H_t f = \int_0^1 s \Delta H_s \Delta^m H_t f \frac{ds}{s} + H_1 \Delta^m H_t f.$$

Thus,

$$\begin{aligned}
&\left(\int_0^1 \left(t^{m-\frac{\alpha}{2}} \left\|\Delta^m H_t f\right\|_p \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad \leq \left(\int_0^1 \left(t^{m-\frac{\alpha}{2}} \int_0^1 \left\|\Delta^{m+1} H_{t+s} f\right\|_p ds \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_0^1 \left(t^{m-\frac{\alpha}{2}} \left\|\Delta^m H_{t+1} f\right\|_p \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad := I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

We start with the estimate of I_1. One has $\Delta^{m+1} H_{t+s} f = H_s \Delta^{m+1} H_t f = H_t \Delta^{m+1} H_s f$. Then

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq \left(\int_0^1 \left(t^{m-\frac{\alpha}{2}} \int_0^t \left\|\Delta^{m+1} H_t f\right\|_p ds \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_0^1 \left(t^{m-\frac{\alpha}{2}} \int_t^1 \left\|\Delta^{m+1} H_s f\right\|_p ds \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \\
&:= II_1 + II_2.
\end{aligned}$$

Notice

$$II_1 = \left(\int_0^1 \left(t^{m+1-\frac{\alpha}{2}} \left\| \Delta^{m+1} H_t f \right\|_p \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}}$$

which is the desired estimate. As far as II_2 is concerned,

$$II_2 = \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 K(s,t) g(s) \frac{ds}{s} \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}}$$

with $g(s) = s^{m+1-\frac{\alpha}{2}} \left\| \Delta^{m+1} H_s f \right\|_p$ and $K(s,t) = \left(\frac{t}{s}\right)^{m-\frac{\alpha}{2}} \mathbb{1}_{s \geq t}$. Since

$$\int_0^1 K(s,t) \frac{ds}{s} \lesssim 1 \qquad \text{and} \qquad \int_0^1 K(s,t) \frac{dt}{t} \lesssim 1,$$

Lemma E.2.1 yields then

$$II_2 \lesssim \left(\int_0^1 g(s)^q \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{q}}$$

which is also the desired estimate.

It remains to estimate I_2. First, verify that Proposition E.2.7 of H_t implies $\|\Delta^m H_{t+1} f\|_p \lesssim \|f\|_p$. Then we obtain

$$I_2 \lesssim \|f\|_p$$

since $\int_0^1 t^{q(m-\frac{\alpha}{2})} \frac{dt}{t} < +\infty$. □

Proposition E.4.3. *For all integers $\beta \geq \gamma > \frac{\alpha}{2}$,*

$$\left(\int_0^1 \left(t^{\beta-\frac{\alpha}{2}} \left\| \Delta^{\beta} H_t f \right\|_p \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \lesssim \left(\int_0^1 \left(t^{\gamma-\frac{\alpha}{2}} \left\| \Delta^{\gamma} H_t f \right\|_p \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Proof: Proposition E.2.7 implies $\left\| \Delta^{\beta-\gamma} H_{\frac{t}{2}} f \right\|_p \lesssim t^{\gamma-\beta} \|f\|_p$. Then

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^1 \left(t^{\beta-\frac{\alpha}{2}} \left\| \Delta^{\beta} H_t f \right\|_p \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} &\lesssim \left(\int_0^1 \left(t^{\gamma-\frac{\alpha}{2}} \left\| \Delta^{\gamma} H_{\frac{t}{2}} f \right\|_p \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\lesssim \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \left(u^{\gamma-\frac{\alpha}{2}} \left\| \Delta^{\gamma} H_u f \right\|_p \right)^q \frac{du}{u} \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left(\int_0^1 \left(t^{\gamma-\frac{\alpha}{2}} \left\| \Delta^{\gamma} H_t f \right\|_p \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

□

Remark E.4.4. *Propositions E.4.1, E.4.2 and E.4.3 imply (i) of Theorem E.1.9.*

Proposition E.4.5. *Let $m > \frac{\alpha}{2}$. Then*

$$\|f\|_p + \left(\sum_{j \leq -1} \left[2^{j(m-\frac{\alpha}{2})} \|\Delta^m H_{2^j} f\|_p \right]^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

is an equivalent norm in $B_{\alpha}^{p,q}(G)$.

Proof: Assertion (i) in Theorem E.1.9 and the following calculus prove the equivalence of norms:

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j\leq -1}\left[2^{j(m-\frac{\alpha}{2})}\|\Delta^m H_{2^j}f\|_p\right]^q\right)^{\frac{1}{q}} &\leq \left(\sum_{j\leq -1}\int_{2^{j-1}}^{2^j}\left[2^{j(m-\frac{\alpha}{2})}\|\Delta^m H_t f\|_p\right]^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\lesssim \left(\int_0^{\frac{1}{2}}\left[t^{m-\frac{\alpha}{2}}\|\Delta^m H_t f\|_p\right]^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\leq \left(\int_0^{1}\left[t^{m-\frac{\alpha}{2}}\|\Delta^m H_t f\|_p\right]^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}\\
&= \left(\sum_{j\leq -1}\int_{2^j}^{2^{j+1}}\left[t^{m-\frac{\alpha}{2}}\|\Delta^m H_t f\|_p\right]^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\leq \left(\sum_{j\leq -1}\left[2^{j(m-\frac{\alpha}{2})}\|\Delta^m H_{2^j}f\|_p\right]^q\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

This proves item (ii) in Theorem E.1.9. □

Proposition E.4.6. *Let $\alpha > 0$ and $l > \frac{\alpha}{2}$. Then*

$$\|H_{\frac{1}{2}}f\|_p + \left(\sum_{j\leq -1}\left[2^{-j\frac{\alpha}{2}}\left\|\int_{2^j}^{2^{j+1}}\left|(t\Delta)^l H_t f\right|\frac{dt}{t}\right\|_p\right]^q\right)^{\frac{1}{q}} \tag{E.15}$$

is an equivalent norm in $B^{p,q}_\alpha(G)$.

Proof: We denote by $\|.\|_{B^{p,q}_{\alpha,1}}$ the norm defined in (E.15). It is easy to check, using assertion (i) in Theorem E.1.9, the Hölder inequality and the triangle inequality, that

$$\|f\|_{B^{p,q}_{\alpha,1}} \lesssim \|f\|_{B^{p,q}_\alpha}.$$

For the converse inequality, we proceed as follows. Fix an integer $m > \frac{\alpha}{2}$.

1. **Decomposition of f:**
   The first step is to decompose f as in Lemma E.3.1

$$f = \frac{1}{(l-1)!}\int_0^1 (t\Delta)^l H_t f\frac{dt}{t} + \sum_{k=0}^{l-1}\frac{1}{k!}\Delta^k H_1 f \text{ in } \mathcal{S}'(G).$$

   We introduce

$$f_n = -\int_{2^n}^{2^{n+1}}(t\Delta)^l H_t f\frac{dt}{t}dt$$

   and

$$c_n = \left\|\int_{2^{n-1}}^{2^n}\left|(t\Delta)^l H_t f\right|\frac{dt}{t}\right\|_p.$$

   Remark then that

$$f = \frac{1}{(l-1)!}\sum_{n=-\infty}^{-1} f_n + \sum_{k=0}^{l-1}\frac{1}{k!}\Delta^k H_1 f \qquad \text{in } \mathcal{S}'(G).$$

2. **Estimates of $\Delta^m H_{2^j} f_n$**
   Note that

$$\begin{aligned}
&\Delta^m H_{2^j} f_n\\
&= -\Delta^m H_{2^{n-1}+2^j}\int_{2^n}^{3.2^{n-1}}(t\Delta)^l H_{t-2^{n-1}}f\frac{dt}{t} - \Delta^m H_{2^n+2^j}\int_{3.2^{n-1}}^{2^{n+1}}(t\Delta)^l H_{t-2^n}f\frac{dt}{t}\\
&= -\Delta^m H_{2^{n-1}+2^j}\int_{2^{n-1}}^{2^n}(t+2^{n-1})^l\Delta^l H_t f\frac{dt}{t} - \Delta^m H_{2^n+2^j}\int_{2^{n-1}}^{2^n}(t+2^n)^l\Delta^l H_t f\frac{dt}{t}.
\end{aligned}$$

Then Proposition E.2.7 implies,

$$\begin{aligned}\|\Delta^m H_{2^j} f_n\|_p &\lesssim [(2^{(n-1)}+2^j]^{-m} \left\| \int_{2^{n-1}}^{2^n} (t+2^{n-1})^l \Delta^l H_t f \frac{dt}{t} \right\|_p \\ &\quad + [2^n+2^j]^{-m} \left\| \int_{2^{n-1}}^{2^n} (t+2^n)^l \Delta^l H_t f \frac{dt}{t} \right\|_p \\ &\lesssim [2^n+2^j]^{-m} \left\| \int_{2^{n-1}}^{2^n} \left|(t\Delta)^l H_t f\right| \frac{dt}{t} \right\|_p .\end{aligned} \tag{E.16}$$

In other words,

$$\|\Delta^m H_{2^j} f_n\|_p \lesssim \begin{cases} 2^{-nm} c_n & \text{if } j \leq n \\ 2^{-jm} c_n & \text{if } j > n \end{cases} . \tag{E.17}$$

3. **Estimate of $\Lambda_\alpha^{p,q}(\sum f_n)$**
   As a consequence,

$$\sum_{j\leq -1} \left[2^{j(m-\frac{\alpha}{2})} \left\| \Delta^m H_{2^j} \sum_{n\leq -1} f_n \right\|_p \right]^q \lesssim \sum_{j\leq -1} \left[2^{j(m-\frac{\alpha}{2})} \sum_{n\leq -1} 2^{-m\max\{j,n\}} c_n \right]^q .$$

   According to Lemma E.2.2, since $0 < m - \frac{\alpha}{2} < m$, one has

$$\sum_{j\leq -1} \left[2^{j(m-\frac{\alpha}{2})} \left\| \Delta^m H_{2^j} \sum f_n \right\|_p \right]^q \lesssim \sum_{n=-\infty}^{-1} \left[2^{-n\frac{\alpha}{2}} c_n \right]^q .$$

4. **Estimate of the remaining term**
   Remark that

$$\|f\|_{B_\alpha^{p,q}} \lesssim \|H_{t_0} f\|_p + \Lambda_\alpha^{p,q}\left(\sum f_n\right) + \sum_{k=0}^{l-1} \Lambda_\alpha^{p,q}\left(\Delta^k H_1 f\right) .$$

   From the previous step and Proposition E.4.5, we proved that

$$\Lambda_\alpha^{p,q}\left(\sum f_n\right) \lesssim \|f\|_{B_{\alpha,1}^{p,q}} .$$

   In order to conclude the proof of Proposition E.4.6, it suffices then to check that for all $k \in [\![0, l-1]\!]$, one has

$$\|\Delta^k H_1 f\|_{B_\alpha^{p,q}} \lesssim \|f\|_{L^p} . \tag{E.18}$$

   Indeed, one has for all $j \leq -1$

$$\begin{aligned}\|\Delta^m H_{2^j} \Delta^k H_1 f\|_p &= \|\Delta^{m+k} H_{1+2^j} f\|_p \\ &\lesssim \left(1+2^j\right)^{-(m+k)} \|f\|_p \\ &\lesssim \|f\|_p .\end{aligned}$$

   Consequently,

$$\begin{aligned}\sum_{j\leq -1} \left[2^{j(m-\frac{\alpha}{2})} \|\Delta^m H_{2^j} \Delta^k H_1 f\|_p \right]^q &\lesssim \|f\|_p^q \sum_{j\leq -1} 2^{jq(m-\frac{\alpha}{2})} \\ &\lesssim \|f\|_p^q .\end{aligned}$$

□

E.4.2 Proof of Theorem E.1.13

Proof: (Theorem E.1.13)

We denote by $\|.\|_{B^{p,q}_{\alpha,Xsup}}$ the norm defined in (E.6). Since

$$\|\Delta^m H_{2^j} f\|_p \leq \max_{t\in[2^j,2^{j+1}]} \sup_{|I|\leq 2m} \|X_I H_t f\|_p\,,$$

it is easy to check that

$$\|f\|_{B^{p,q}_\alpha} \lesssim \|f\|_{B^{p,q}_{\alpha,Xsup}}.$$

For the converse inequality, it is enough to check that

$$\|f\|_{B^{p,q}_{\alpha,Xsup}} \lesssim \|f\|_{B^{p,q}_{\alpha,1}}.$$

We proceed then as the proof of Proposition E.4.6 since Proposition E.2.7 yields

$$\max_{t\in[2^j,2^{j+1}]} \sup_{|I|\leq \bar{m}} \|X_I H_t f_n\|_p \lesssim \begin{cases} 2^{-n\frac{\bar{m}}{2}} c_n & \text{if } j\leq n \\ 2^{-j\frac{\bar{m}}{2}} c_n & \text{if } j>n \end{cases}$$

with a proof analogous to the one of (E.17). □

E.4.3 Embeddings and interpolation

Proof: (of Corollary E.1.11) The proof is analogous to the one of Proposition 2.3.2/2 in [Tri83] using Proposition E.4.5. It relies on the monotonicity of l_q spaces, see [Tri83, 1.2.2/4]. □

Let us turn to interpolation properties of Besov spaces, that implies in particular Corollary E.1.12.

Corollary E.4.7. *Let $s_0, s_1, s \geq 0$, $1 \leq p_0, p_1, p, q_0, q_1, r \leq \infty$ and $\theta \in (0,1)$.*

Define

$$s^* = (1-\theta)s_0 + \theta s_1,$$
$$\frac{1}{p^*} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1},$$
$$\frac{1}{q^*} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

i. If $s_0 \neq s_1$ then

$$(B^{p,q_0}_{s_0}, B^{p,q_1}_{s_1})_{\theta,r} = B^{p,r}_{s^*}.$$

ii. In the case where $s_0 = s_1$, we have

$$(B^{p,q_0}_{s}, B^{p,q_1}_{s})_{\theta,q^*} = B^{p,q^*}_{s}.$$

iii. If $p^* = q^* := r$,

$$(B^{p_0,q_0}_{s_0}, B^{p_1,q_1}_{s_1})_{\theta,r} = B^{r,r}_{s^*}.$$

iv. If $s_0 \neq s_1$,

$$(B^{p_0,q_0}_{s_0}, B^{p_1,q_1}_{s_1})_{[\theta]} = B^{p^*,q^*}_{s^*}.$$

Proof: The proof is inspired by [BL76, Theorem 6.4.3].

Recall (see Definition 6.4.1 in [BL76]) that a space B is called a retract of A if there exists two bounded linear operators $\mathcal{J} : B \to A$ and $\mathcal{P} : A \to B$ such that $\mathcal{P}\circ\mathcal{J}$ is the identity on B.
Therefore, we just need to prove that the spaces $B^{p,q}_\alpha$ are retracts of $l^\alpha_q(L^p)$ where, for any Banach space A (see paragraph 5.6 in [BL76]),

$$l^\alpha_q(A) = \left\{ u \in A^{\mathbb{Z}_-},\ \|u\|_{\ell^\alpha_q(A)} := \left(\sum_{j\leq 0} \left[2^{-j\frac{\alpha}{2}} \|u_j\|_A\right]^q \right)^{\frac{1}{q}} < +\infty \right\}.$$

Then interpolation on the spaces $l^\alpha_q(L^p)$ (see [BL76], Theorems 5.6.1, 5.6.2 and 5.6.3) provides the result. Note the weight appearing $l^\alpha_q(A)$ is $2^{-j\frac{\alpha}{2}}$ (and not $2^{j\frac{\alpha}{2}}$) because we sum on *negative* integers.

Fix $m > \frac{\alpha}{2}$. Define the functional $\mathcal{J}$ by $\mathcal{J} f = ((\mathcal{J} f)_j)_{j \leq 0}$ where

$$(\mathcal{J} f)_j = 2^{jm} \Delta^m H_{2^{j-1}} f$$

if $j \leq -1$ and

$$(\mathcal{J} f)_0 = H_{\frac{1}{2}} f.$$

Moreover, define $\mathcal{P}$ on $l_q^\alpha(L^p)$ by

$$\mathcal{P} u = \sum_{k=0}^{2m-1} \frac{1}{k!} \Delta^k H_{\frac{1}{2}} u_0 + \frac{1}{(2m-1)!} \sum_{j \leq -1} 2^{-jm} \int_{2^j}^{2^{j+1}} t^{2m} \Delta^m H_{t-2^{j-1}} u_j \frac{dt}{t}.$$

We will see below that $\mathcal{P}$ is well-defined on $l_q^\alpha(L^p)$. Proposition E.4.5 implies immediately that $\mathcal{J}$ is bounded from $B_\alpha^{p,q}$ to $l_q^\alpha(L^p)$. Moreover, Lemma E.3.1 easily provides that

$$\mathcal{P} \circ \mathcal{J} = Id_{B_\alpha^{p,q}}.$$

It remains to verify that $\mathcal{P}$ is a bounded linear operator from $l_q^\alpha(L^p)$ to $B_\alpha^{p,q}$. The proof is similar to the one of Proposition E.4.6. Indeed, proceeding as the fourth step of Proposition E.4.6, one gets

$$\left\| \sum_{k=0}^{2m-1} \frac{1}{k!} \Delta^k H_{\frac{1}{2}} u_0 \right\|_{B_\alpha^{p,q}} \lesssim \|u_0\|_p.$$

It is plain to see that

$$\begin{aligned} \left\| H_{\frac{1}{2}} \sum_{j \leq -1} 2^{-jm} \int_{2^j}^{2^{j+1}} t^{2m} \Delta^m H_{t-2^{j-1}} u_j \frac{dt}{t} \right\|_p &\leq \sum_{j \leq -1} 2^{-jm} \int_{2^j}^{2^{j+1}} t^{2m} \left\| H_{\frac{1}{2}} \Delta^m H_{t-2^{j-1}} u_j \right\|_p \frac{dt}{t} \\ &\leq \sum_{j \leq -1} 2^{-jm} \int_{2^j}^{2^{j+1}} t^{2m} \left\| H_{\frac{1}{2}} \Delta^m u_j \right\|_p \frac{dt}{t} \\ &\lesssim \sum_{j \leq -1} 2^{jm} \|u_j\|_p \\ &\lesssim \|u\|_{l_q^\alpha(L^p)}. \end{aligned}$$

Then the proof of the boundedness of $\mathcal{P}$ is reduced to the one of

$$I := \left(\sum_{k \leq -1} \left(2^{k(m-\frac{\alpha}{2})} \left\| \Delta^m H_{2^k} \sum_{j \leq -1} 2^{-jm} \int_{2^j}^{2^{j+1}} t^{2m} \Delta^m H_{t-2^{j-1}} u_j \frac{dt}{t} \right\|_p \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \lesssim \|u\|_{l_q^\alpha(L^p)}. \tag{E.19}$$

Indeed,

$$\begin{aligned} I^q &\lesssim \sum_{k \leq -1} \left(2^{k(m-\frac{\alpha}{2})} \left\| \sum_{j \leq -1} 2^{-jm} \int_{2^j}^{2^{j+1}} (t\Delta)^{2m} H_{t-2^{j-1}+2^k} u_j \frac{dt}{t} \right\|_p \right)^q \\ &\lesssim \sum_{k \leq -1} \left(2^{k(m-\frac{\alpha}{2})} \sum_{j \leq -1} 2^{jm} \left\| \Delta^{2m} H_{2^{j-1}+2^k} u_j \right\|_p \right)^q \\ &\lesssim \sum_{k \leq -1} \left(2^{k(m-\frac{\alpha}{2})} \sum_{j \leq -1} \frac{2^{jm}}{(2^j+2^k)^{2m}} \|u_j\|_p \right)^q \\ &\lesssim \sum_{k \leq -1} \left(2^{k(m-\frac{\alpha}{2})} \sum_{j \leq -1} 2^{-2m \max\{j,k\}} 2^{jm} \|u_j\|_p \right)^q \end{aligned}$$

Check that $0 < m - \frac{\alpha}{2} < 2m$. Thus, Lemma E.2.2 yields

$$I^q \lesssim \sum_{j \leq -1} \left[2^{-j(\frac{\alpha}{2}+m)} 2^{jm} \|u_j\|_p \right]^q \leq \|u\|_{l_q^\alpha(L^p)}^q,$$

which proves (E.19) and thus concludes the proof. □

E.5 Algebra under pointwise product - Theorem E.1.14

We want to introduce some paraproducts. The idea of paraproducts goes back to [Bon81]. The term "paraproducts" is used to a denotes some non-commutative bilinear forms Λ_i such that $fg = \sum \Lambda_i(f,g)$. They are introduced in some cases, where the bilinear forms Λ_i are easier to handle than the pointwise product.
In the context of doubling spaces, a definition of paraproducts is given in [Ber12, Fre11]. We need to slightly modify the definition in [Ber12] to adapt them to non-doubling spaces.

For all $t > 0$, define

$$\phi_t(\Delta) = -\sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!}(t\Delta)^k H_t,$$

and observe that the derivative of $t \mapsto \phi_t(\Delta)$ is given by

$$\phi_t'(\Delta) = \frac{1}{(m-1)!}\frac{1}{t}(t\Delta)^m H_t := \frac{1}{t}\psi_t(\Delta).$$

Remark E.5.1. *Even if ϕ_t actually depends on m, we do not indicate this dependence explicitly.*

Recall that Lemma E.3.1 provides the identity

$$f = \int_0^1 \psi_t(\Delta) f \frac{dt}{t} - \phi_1(\Delta) f \qquad \text{in } \mathcal{S}'(G). \tag{E.20}$$

Proposition E.5.2. *Let $p, q, r \in [1, +\infty]$ such that $\frac{1}{r} := \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1$. Let $(f,g) \in L^p(G) \times L^q(G)$.*
One has the formula

$$fg = \Pi_f(g) + \Pi_g(f) + \Pi(f,g) - \phi_1(\Delta)[\phi_1(\Delta)f \cdot \phi_1(\Delta)g] \qquad \text{in } \mathcal{S}'(G),$$

where

$$\Pi_f(g) = \int_0^1 \phi_t(\Delta)[\psi_t(\Delta)f \cdot \phi_t(\Delta)g]\frac{dt}{t}$$

and

$$\Pi(f,g) = \int_0^1 \psi_t(\Delta)[\phi_t(\Delta)f \cdot \phi_t(\Delta)g]\frac{dt}{t}.$$

Proof: Since $fg \in L^r \subset \mathcal{S}'(G)$, the formula (E.20) provides in $\mathcal{S}'(G)$

$$[f \cdot g] = \int_0^1 \psi_t(\Delta)[f \cdot g]\frac{dt}{t} - \phi_1(\Delta)[f \cdot g]. \tag{E.21}$$

We can use again twice (one for f and one for g) the identity (E.20) to get

$$
\begin{aligned}
[f\cdot g] &= \int_0^1 \psi_t(\Delta)\left[\left\{\int_0^1 \psi_u(\Delta) f\frac{du}{u} - \phi_1(\Delta) f\right\}\cdot\left\{\int_0^1 \psi_v(\Delta) g\frac{dv}{v} - \phi_1(\Delta) g\right\}\right]\frac{dt}{t} \\
&\quad - \phi_1(\Delta)\left[\left\{\int_0^1 \psi_u(\Delta) f\frac{du}{u} - \phi_1(\Delta) f\right\}\cdot\left\{\int_0^1 \psi_v(\Delta) g\frac{dv}{v} - \phi_1(\Delta) g\right\}\right] \\
&= \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \psi_t(\Delta)[\psi_u(\Delta)f\cdot\psi_v(\Delta)g]\frac{dt\,du\,dv}{tuv} \\
&\quad - \int_0^1\int_0^1 \psi_t(\Delta)[\phi_1(\Delta)f\cdot\psi_v(\Delta)g]\frac{dt\,dv}{tv} - \int_0^1\int_0^1 \psi_t(\Delta)[\psi_u(\Delta)f\cdot\phi_1(\Delta)g]\frac{dt\,du}{tu} \\
&\qquad\qquad - \int_0^1\int_0^1 \phi_1(\Delta)[\psi_u(\Delta)f\cdot\psi_v(\Delta)g]\frac{du\,dv}{uv} \\
&\quad + \int_0^1 \psi_t(\Delta)[\phi_1(\Delta)f\cdot\phi_1(\Delta)g]\frac{dt}{t} + \int_0^1 \phi_1(\Delta)[\psi_u(\Delta)f\cdot\phi_1(\Delta)g]\frac{du}{u} \\
&\qquad\qquad + \int_0^1 \phi_1(\Delta)[\phi_1(\Delta)f\cdot\psi_v(\Delta)g]\frac{dv}{v} \\
&\quad - \phi_1(\Delta)[\phi_1(\Delta)\cdot\phi_1(\Delta)] \\
&\quad := R(f,g) + \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \psi_t(\Delta)[\psi_u(\Delta)f\cdot\psi_v(\Delta)g]\frac{dt\,du\,dv}{tuv} - \phi_1(\Delta)[\phi_1(\Delta)\cdot\phi_1(\Delta)].
\end{aligned}
\tag{E.22}
$$

The domain $[0,1]^3$ can be divided in the subsets $D(t,u,v)$, $D(u,t,v)$ and $D(v,u,t)$ where $D(a,b,c) = \{(a,b,c)\in[0,1]^3,\ a<\min\{b,c\}\}$. Consequently,

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \psi_t(\Delta)[\psi_u(\Delta)f\cdot\psi_v(\Delta)g]\frac{dt\,du\,dv}{tuv} \\
&\quad = \int_0^1\int_t^1\int_t^1 \psi_t(\Delta)[\psi_u(\Delta)f\cdot\psi_v(\Delta)g]\frac{dt\,du\,dv}{tuv} + \int_0^1\int_u^1\int_u^1 \psi_t(\Delta)[\psi_u(\Delta)f\cdot\psi_v(\Delta)g]\frac{du\,dt\,dv}{utv} \\
&\qquad\qquad + \int_0^1\int_v^1\int_v^1 \psi_t(\Delta)[\psi_u(\Delta)f\cdot\psi_v(\Delta)g]\frac{dv\,du\,dt}{vut} \\
&\quad = \int_0^1 \psi_t(\Delta)[\{\phi_1(\Delta)f - \phi_t(\Delta)f\}\cdot\{\phi_1(\Delta)g - \phi_t(\Delta)g\}]\frac{dt}{t} \\
&\qquad\qquad + \int_0^1 \{\phi_1(\Delta)-\phi_u(\Delta)\}[\psi_u(\Delta)f\cdot\{\phi_1(\Delta)g - \phi_u(\Delta)g\}]\frac{du}{u} \\
&\qquad\qquad + \int_0^1 \{\phi_1(\Delta)-\phi_v(\Delta)\}[\{\phi_1(\Delta)f - \phi_v(\Delta)f\}\cdot\psi_v(\Delta)g]\frac{dv}{v} \\
&\quad := S(f,g) + \Pi_f(g) + \Pi_g(f) + \Pi(f,g).
\end{aligned}
\tag{E.23}
$$

It remains to check that $R(f,g)+S(f,g)=0$. This identity, that can be proven with similar computations as (E.23), is left to the reader. $\square$

Proposition E.5.3. *Let G be a unimodular Lie group. Let $\alpha>0$ and $p,p_1,p_2,q\in[1,+\infty]$ such that*

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}=\frac{1}{p}.$$

Then for all $f\in B_\alpha^{p_1,q}$ and all $g\in L^{p_2}$, one has

$$\Lambda_\alpha^{p,q}[\Pi_f(g)] \lesssim \|f\|_{B_\alpha^{p_1,q}}\|g\|_{L^{p_2}}.$$

Proof: Let $m>\frac{\alpha}{2}$ and $j\le -1$. Notice that, for all $u\in(0,1)$,

$$\|\Delta^m H_u \Pi_f(g)\|_p \le \int_0^1 \|\Delta^m H_u \phi_t(\Delta)[\psi_t(\Delta)f\cdot\phi_t(\Delta)g]\|_p\,\frac{dt}{t}.$$

Remark that

$$\|\phi_t(\Delta)h\|_r \lesssim \|H_{\frac{t}{2}}h\|_r$$

for all $r \in [1,+\infty]$ and all $h \in L^r$. As a consequence,

$$\begin{aligned}
\left\|\Delta^m H_u \phi_t(\Delta)[\psi_t(\Delta)f \cdot \phi_t(\Delta)g]\right\|_p &= \left\|\phi_t(\Delta)\Delta^m H_u[\psi_t(\Delta)f \cdot \phi_t(\Delta)g]\right\|_p \\
&\lesssim \left\|\Delta^m H_{\frac{t}{2}+u}[\psi_t(\Delta)f \cdot \phi_t(\Delta)g]\right\|_p \\
&\lesssim \left(\frac{t}{2}+u\right)^{-m} \left\|\psi_t(\Delta)f \cdot \phi_t(\Delta)g\right\|_p \\
&\lesssim \min\left\{t^{-m}, u^{-m}\right\} \left\|\psi_t(\Delta)f \cdot \phi_t(\Delta)g\right\|_p \\
&\lesssim \min\left\{t^{-m}, u^{-m}\right\} \left\|\psi_t(\Delta)f\right\|_{p_1} \left\|\phi_t(\Delta)g\right\|_{p_2} \\
&\lesssim \min\left\{t^{-m}, u^{-m}\right\} \left\|(t\Delta)^m H_t f\right\|_{p_1} \left\|g\right\|_{p_2}.
\end{aligned}$$

We deduce then

$$\begin{aligned}
&\Lambda_\alpha^{p,q}[\Pi_f(g)]^q \\
&\quad\lesssim \|g\|_{p_2}^q \int_0^1 \left(u^{m-\frac{\alpha}{2}} \int_0^1 (\max\{u,t\})^{-m} \left\|(t\Delta)^m H_t f\right\|_{p_1} \frac{dt}{t}\right)^q \frac{du}{u} \\
&\quad\lesssim \|g\|_{p_2}^q \sum_{j\leq -1} \left(2^{j(m-\frac{\alpha}{2})} \sum_{n=-\infty}^{-1} 2^{-m\max\{j,n\}} \left\|(2^n\Delta)^m H_{2^n} f\right\|_{p_1}\right)^q \\
&\quad\lesssim \|g\|_{L^{p_2}} \left(\sum_{n\leq -1} 2^{-n\frac{\alpha}{2}q} 2^{nmq} \|\Delta^m H_{2^n} f\|_{p_1}^q\right)^{\frac{1}{q}},
\end{aligned}$$

where we used Lemma E.2.2 for the last line. As a consequence, we obtain if $\alpha \in (0, 2m)$,

$$\begin{aligned}
\Lambda_\alpha^{p,q}[\Pi_f(g)] &\lesssim \|g\|_{L^{p_2}} \left(\sum_{n\leq -1} 2^{nq(m-\frac{\alpha}{2})} \|\Delta^m H_{2^n} f\|_{p_1}^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\lesssim \|g\|_{L^{p_2}} \|f\|_{B_\alpha^{p_1,q}}
\end{aligned}$$

where we used Proposition E.4.5 for the last line. □

Proposition E.5.4. *Let G be a unimodular Lie group. Let $\alpha > 0$ and $p, p_1, p_2, p_3, p_4, q \in [1,+\infty]$ such that*

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_4} = \frac{1}{p}.$$

Then for all $f \in B_\alpha^{p_1,q} \cap L^{p_3}$ and all $g \in B_\alpha^{p_4,q} \cap L^{p_2}$, one has

$$\Lambda_\alpha^{p,q}[\Pi(f,g)] \lesssim \|f\|_{B_\alpha^{p_1,q}} \|g\|_{L^{p_2}} + \|f\|_{L^{p_3}} \|g\|_{B_\alpha^{p_4,q}}.$$

Proof: Notice first that

$$\left\|\Delta^m H_u \Pi(f,g)\right\|_p \leq \int_0^1 \left\|\Delta^m H_u H_t (t\Delta)^m [\phi_t(\Delta)f \cdot \phi_t(\Delta)g]\right\|_p \frac{dt}{t}.$$

Let us recall then that $X_i(f\cdot g) = f \cdot X_i g + X_i f \cdot g$. Consequently, since $\Delta = \sum_{i=1}^k X_i^2$, one has

$$\|\Delta^m[f\cdot g]\|_p \lesssim \|\Delta^m f \cdot g\|_p + \|f \cdot \Delta^m g\|_p + \sum_{k=1}^{2m-1} \sup_{|I_1|=k} \sup_{|I_2|=2m-k} \|X_{I_1} f \cdot X_{I_2} g\|_p.$$

In the following computations, (Y_{I_1}, Z_{I_2}) denotes the couple (X_{I_1}, X_{I_2}) if $|I_1| \neq 0$ and $|I_2| \neq 0$, $(\Delta^{|I_1|/2}, I)$ if $|I_2| = 0$ and $(I, \Delta^{|I_2|/2})$ if $|I_1| = 0$. With these notations, one has

$$\begin{aligned}
&\|\Delta^m H_{u+t}(t\Delta)^m[\phi_t(\Delta)f \cdot \phi_t(\Delta)g]\|_p \\
&\qquad \lesssim \min\left\{t^{-m}, u^{-m}\right\} \|(t\Delta)^m[\phi_t(\Delta)f \cdot \phi_t(\Delta)g]\|_p \\
&\qquad \lesssim \min\left\{t^{-m}, u^{-m}\right\} \sum_{k,l=0}^{m-1} \left\|(t\Delta)^m[(t\Delta)^k H_t f \cdot (t\Delta)^l H_t g]\right\|_p \\
&\qquad \lesssim \min\left\{t^{-m}, u^{-m}\right\} \sum_{k,l=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{2m} t^m \sup_{|I_1|=i} \sup_{|I_2|=2m-i} \left\|Y_{I_1}(t\Delta)^k H_t f \cdot Z_{I_2}(t\Delta)^l H_t g\right\|_p \\
&\qquad = \min\left\{t^{-m}, u^{-m}\right\} \sum_{k,l=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{2m} t^{m+k+l} \sup_{|I_1|=i} \sup_{|I_2|=2m-i} \left\|Y_{I_1}\Delta^k H_t f \cdot Z_{I_2}\Delta^l H_t g\right\|_p \\
&\qquad \lesssim \min\left\{t^{-m}, u^{-m}\right\} \sum_{k,l=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{2m} t^{m+k+l} \sup_{|I_1|=i+2k} \sup_{|I_2|=2m+2l-i} \|Y_{I_1} H_t f \cdot Z_{I_2} H_t g\|_p \\
&\qquad \lesssim \min\left\{t^{-m}, u^{-m}\right\} \sum_{\substack{2m \leq k+l \leq 6m-4 \\ k+l \text{ even}}} t^{\frac{k+l}{2}} \sup_{|I_1|=k} \sup_{|I_2|=l} \|Y_{I_1} H_t f \cdot Z_{I_2} H_t g\|_p .
\end{aligned}$$

Setting $c_n = \displaystyle\sum_{\substack{2m \leq k+l \leq 6m-4 \\ k+l \text{ even}}} \int_{2^n}^{2^{n+1}} t^{\frac{k+l}{2}} \sup_{|I_1|=k} \sup_{|I_2|=l} \|Y_{I_1} H_t f \cdot Z_{I_2} H_t g\|_p \frac{dt}{t}$, one has

$$\begin{aligned}
&\Lambda_\alpha^{p,q}[\Pi(f,g)]^q \\
&\quad \lesssim \int_0^1 \left(u^{m-\frac{\alpha}{2}} \int_0^1 \|\Delta^m H_{u+t}(t\Delta)^m[\phi_t(\Delta)f \cdot \phi_t(\Delta)g]\|_p \frac{dt}{t}\right)^q \frac{du}{u} \\
&\quad \lesssim \int_0^1 \left(u^{m-\frac{\alpha}{2}} \int_0^1 \min\left\{t^{-m}, u^{-m}\right\} \sum_{\substack{2m \leq k+l \leq 6m-4 \\ k+l \text{ even}}} t^{\frac{k+l}{2}} \sup_{|I_1|=k} \sup_{|I_2|=l} \|Y_{I_1} H_t f \cdot Z_{I_2} H_t g\|_p \frac{dt}{t}\right)^q \frac{du}{u} \\
&\quad \lesssim \sum_{j=-\infty}^{-1} \left[2^{j(m-\frac{\alpha}{2})} \sum_{n=-\infty}^{-1} 2^{-m\max\{n,j\}} c_n\right]^q \\
&\quad \lesssim \sum_{n \leq -1} 2^{-nq\frac{\alpha}{2}} c_n^q
\end{aligned}$$

where the last line is a consequence of Lemma E.2.2, since $0 < m - \frac{\alpha}{2} < m$.

It remains to prove that for any couple $(k,l) \in \mathbb{N}^2$ satisfying $6m-4 \geq k+l \geq 2m$ and $k+l$ even, we have

$$\begin{aligned}
T &:= \left(\sum_{n \leq -1} 2^{-nq\frac{\alpha}{2}} \left(\int_{2^n}^{2^{n+1}} t^{\frac{k+l}{2}} \sup_{|I_1|=k} \sup_{|I_2|=l} \|Y_{I_1} H_t f \cdot Z_{I_2} H_t g\|_p \frac{dt}{t}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\lesssim \|f\|_{B_\alpha^{p_1,q}} \|g\|_{L^{p_2}} + \|f\|_{L^{p_3}} \|g\|_{B_\alpha^{p_4,q}} .
\end{aligned} \tag{E.24}$$

1. **If $k = 0$ or $l = 0$:**
   Since k and l play symmetric roles, we can assume without loss of generality that $l = 0$. In this case, k is even and if $k = 2k'$,

$$\begin{aligned}
\sup_{|I_1|=k} \sup_{|I_2|=0} \|Y_{I_1} H_t f \cdot Z_{I_2} H_t g\|_p &= \left\|\Delta^{k'} H_t f \cdot H_t g\right\|_p \\
&\leq \left\|\Delta^{k'} H_t f\|_{p_1} \|H_t g\right\|_{p_2} \\
&\leq \left\|\Delta^{k'} H_t f\right\|_{p_1} \|g\|_{p_2} .
\end{aligned}$$

Therefore,

$$
\begin{aligned}
T &\leq \|g\|_{L^{p_2}} \left(\sum_{n\leq -1} 2^{-nq\frac{\alpha}{2}} \left(\int_{2^n}^{2^{n+1}} t^{k'} \left\| \Delta^{k'} H_t f \right\|_{p_1} \frac{dt}{t} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\lesssim \|g\|_{L^{p_2}} \|f\|_{B^{p_1,q}_\alpha}
\end{aligned}
$$

where the second line is due to the fact that $k' \geq m > \frac{\alpha}{2}$.

2. **If** $k \geq 1$ **and** $l \geq 1$**:**
Define $\alpha_1, \alpha_2, r_1, r_2, q_1$ and q_2 by

$$
\alpha_1 = \frac{k}{k+l}\alpha \quad , \quad \alpha_2 = \frac{l}{k+l}\alpha,
$$

$$
\frac{k+l}{r_1} = \frac{k}{p_1} + \frac{l}{p_3} \quad , \quad \frac{k+l}{r_2} = \frac{k}{p_2} + \frac{l}{p_4},
$$

$$
\frac{k+l}{q_1} = \frac{k}{q} \quad , \quad \frac{k+l}{q_2} = \frac{l}{q}.
$$

In this case, notice that $k > \alpha_1$ and $l > \alpha_2$. One has then

$$
\sup_{|I_1|=k} \sup_{|I_2|=l} \|X_{I_1} H_t f \cdot X_{I_2} H_t g\|_p \leq \sup_{|I_1|=k} \|X_{I_1} H_t f\|_{r_1} \sup_{|I_2|=l} \|X_{I_2} H_t g\|_{r_2}
$$

and thus Hölder inequality provides

$$
\begin{aligned}
T \leq & \left(\sum_{n\leq -1} \left(2^{n\frac{k-\alpha_1}{2}} \max_{t\in[2^j,2^{j+1}]} \sup_{|I_1|=k} \|X_{I_1} H_t f\|_{r_1} \right)^{q_1} \right)^{\frac{1}{q_1}} \\
& \left(\sum_{n\leq -1} \left(2^{n\frac{l-\alpha_2}{2}} \max_{t\in[2^j,2^{j+1}]} \sup_{|I_2|=l} \|X_{I_2} H_t g\|_{r_2} \right)^{q_2} \right)^{\frac{1}{q_2}} \\
\lesssim & \|f\|_{B^{r_1,q_1}_{\alpha_1}} \|g\|_{B^{r_2,q_2}_{\alpha_2}}
\end{aligned}
$$

where the second line is due to Theorem E.1.13.
Let $\theta = \frac{k}{k+l}$. Complex interpolation (Corollary E.1.12) provides

$$
(B^{p_3,\infty}_0, B^{p_1,q}_\alpha)_{[\theta]} = B^{r_1,q_1}_{\alpha_1}
$$

and

$$
(B^{p_4,q}_\alpha, B^{p_2,\infty}_0)_{[\theta]} = B^{r_2,q_2}_{\alpha_2}.
$$

Remark also that $L^s(G)$ is continuously embedded in $B^{s,\infty}_0(G)$ (this can be easily seen from the definition of Besov spaces). As a consequence,

$$
\begin{aligned}
T &\lesssim \|f\|_{B^{r_1,q_1}_{\alpha_1}} \|g\|_{B^{r_2,q_2}_{\alpha_2}} \\
&\lesssim \|f\|^{\theta}_{L^{p_3}} \|f\|^{1-\theta}_{B^{p_1,q}_\alpha} \|g\|^{\theta}_{B^{p_4,q}_\alpha} \|g\|^{1-\theta}_{L^{p_2}} \\
&\lesssim \|f\|_{L^{p_3}} \|g\|_{B^{p_4,q}_\alpha} + \|f\|_{B^{p_1,q}_\alpha} \|g\|_{L^{p_2}}
\end{aligned}
$$

which is the desired conclusion.

□

Let us now prove Theorem E.1.14

Proof: With the use of Propositions E.5.2, E.5.3 and E.5.4, it remains to check that

$$
\|H_{\frac{1}{2}}[f \cdot g]\|_{L^p} \lesssim \|f\|_{B^{p_1,q}_\alpha} \|g\|_{L^{p_2}} + \|f\|_{L^{p_3}} \|g\|_{B^{p_4,q}_\alpha} \tag{E.25}
$$

and

$$
\|\phi_1(\Delta)[\phi_1(\Delta)f \cdot \phi_1(\Delta)g\|_{B^{p,q}_\alpha} \lesssim \|f\|_{B^{p_1,q}_\alpha} \|g\|_{L^{p_2}} + \|f\|_{L^{p_3}} \|g\|_{B^{p_4,q}_\alpha}. \tag{E.26}
$$

The inequality (E.25) is easy to check. By Proposition E.4.1, one has

$$\|H_{\frac{1}{2}}[f\cdot g]\|_{L^p} \leq \|f\cdot g\|_p \leq \|f\|_{p_1}\|g\|_{p_2} \leq \|f\|_{B_\alpha^{p_1,q}}\|g\|_{L^{p_2}}.$$

For (E.26), recall that (E.18) implies

$$\begin{aligned}\|\phi_1(\Delta)[\phi_1(\Delta)f\cdot\phi_1(\Delta)g]\|_{B_\alpha^{p,q}} &\lesssim \|\phi_1(\Delta)f\cdot\phi_1(\Delta)g\|_{L^p}\\ &\lesssim \|\phi_1(\Delta)f\|_{p_1}\|\phi_1(\Delta)g\|_{p_2}\\ &\lesssim \|f\|_{B_\alpha^{p_1,q}}\|g\|_{L^{p_2}}.\end{aligned}$$

□

E.6 Other characterizations of Besov spaces

E.6.1 Characterization by differences of functions - Theorem E.1.16

Lemma E.6.1. *Let $p,q\in[1,+\infty]$ and $\alpha>0$. There exists $c>0$ such that, for all $f\in L^p(G)$,*

$$\Lambda_\alpha^{p,q}(f) \lesssim \left(\int_G \left(\frac{\|\nabla_y f\|_p e^{-c|y|^2}}{|y|^\alpha}\right)^q \frac{dy}{V(|y|)}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Proof:
Since $\int_G \frac{\partial h_t}{\partial t}(y)dx = 0$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial H_t}{\partial t}f(x) &= \int_G \frac{\partial h_t}{\partial t}(y)f(xy)dy\\ &= \int_G \frac{\partial h_t}{\partial t}(y)[f(xy)-f(x)]dy\\ &= \int_G \frac{\partial h_t}{\partial t}(y)\nabla_y f(x)dy.\end{aligned} \tag{E.27}$$

Consequently,

$$\left\|\frac{\partial H_t}{\partial t}f\right\|_p \leq \int_G \left|\frac{\partial h_t}{\partial t}(y)\right| \|\nabla_y f\|_p dy.$$

Proposition E.2.5 provides

$$\begin{aligned}\Lambda_\alpha^{p,q}(f) &\lesssim \left(\int_0^1 \left(t^{1-\frac{\alpha}{2}}\int_G \frac{1}{tV(\sqrt{t})}e^{-c\frac{|y|^2}{t}}\|\nabla_y f\|_p dy\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}\\ &\lesssim \left(\int_0^1 \left(t^{1-\frac{\alpha}{2}}\int_G \frac{1}{tV(\sqrt{t})}e^{-c'\frac{|y|^2}{t}}\|\nabla_y f\|_p e^{-c'\frac{|y|^2}{t}} dy\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}\\ &\lesssim \left(\int_0^1 \left(t^{1-\frac{\alpha}{2}}\int_G \frac{1}{tV(\sqrt{t})}e^{-c'\frac{|y|^2}{t}}\|\nabla_y f\|_p e^{-c'|y|^2} dy\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}\\ &= \left(\int_0^1 \left(\int_G K(t,y)g(y)\frac{dy}{V(|y|)}\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

with $c'=\frac{c}{2}$, $g(y)=\frac{\|\nabla_y f\|_p}{|y|^\alpha}e^{-c'|y|^2}$ and $K(t,y)=\frac{V(|y|)}{V(\sqrt{t})}\left(\frac{|y|^2}{t}\right)^{\frac{\alpha}{2}}e^{-c'\frac{|y|^2}{t}}$ (note that we used the fact that $t\in(0,1)$ in the third line). Lemma E.2.1 and Proposition E.2.4 imply then

$$\begin{aligned}\Lambda_\alpha^{p,q}(f) &\lesssim \left(\int_G |g(y)|^q \frac{dy}{V(|y|)}\right)^{\frac{1}{q}}\\ &= \left(\int_G \left(\frac{\|\nabla_y f\|_p e^{-c|y|^2}}{|y|^\alpha}\right)^q \frac{dy}{V(|y|)}\right)^{\frac{1}{q}}.\end{aligned}$$

□

Proposition E.6.2. *Let $p, q \in [1, +\infty]$ and $\alpha > 0$, then*

$$\Lambda_\alpha^{p,q}(f) \lesssim L_\alpha^{p,q}(f) + \|f\|_p.$$

Proof:

According to Lemma E.6.1, it is sufficient to check that

$$\left(\int_G \left(\frac{\|\nabla_y f\|_p e^{-c|y|^2}}{|y|^\alpha} \right)^q \frac{dy}{V(|y|)} \right)^{\frac{1}{q}} \lesssim L_\alpha^{p,q}(f) + \|f\|_p.$$

Since we obviously have

$$\left(\int_{|y|\leq 1} \left(\frac{\|\nabla_y f\|_p e^{-c|y|^2}}{|y|^\alpha} \right)^q \frac{dy}{V(|y|)} \right)^{\frac{1}{q}} \leq L_\alpha^{p,q}(f),$$

all we need to prove is

$$T = \left(\int_{|y|\geq 1} \left(\frac{\|\nabla_y f\|_p e^{-c|y|^2}}{|y|^\alpha} \right)^q \frac{dy}{V(|y|)} \right)^{\frac{1}{q}} \lesssim \|f\|_p.$$

Indeed, $\|\nabla_y f\|_p \leq 2\|f\|_p$ and thus

$$\begin{aligned} T &\lesssim \|f\|_p \left(\int_{|y|\geq 1} \left(e^{-c|y|^2} \right)^q dy \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\lesssim \|f\|_p \left(\sum_{j=0}^{\infty} e^{-cq4^j} V(2^{j+1}) \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\lesssim \|f\|_p, \end{aligned}$$

where the last line holds because $V(r)$ have at most exponential growth. □

Proposition E.6.3. *Let $p, q \in [1, +\infty]$ and $\alpha \in (0, 1)$. Then*

$$L_\alpha^{p,q}(f) \lesssim \Lambda_\alpha^{p,q}(f) + \|f\|_p \qquad \forall f \in B_\alpha^{p,q}(G).$$

Proof:

1. **Decomposition of f:**
   The first step is to decompose f as

   $$f = (f - H_1 f) + H_1 f.$$

   We introduce

   $$f_n = -\int_{2^n}^{2^{n+1}} \frac{\partial H_t f}{\partial t} dt = -\int_{2^n}^{2^{n+1}} \Delta H_t f \, dt$$

   and

   $$c_n = \int_{2^{n-1}}^{2^n} \left\| \frac{\partial H_t f}{\partial t} \right\|_p dt.$$

   Remark then that

   $$\|f_n\|_p \leq c_{n+1}$$

   and Lemma E.3.1 provides

   $$f - H_1 f = \sum_{n=-\infty}^{-1} f_n \qquad \text{in } \mathcal{S}'(G).$$

2. **Estimate of $X_i f_n$:**
Let us prove that if $n \leq -1$, one has for all $i \in [\![1, k]\!]$

$$\|X_i f_n\|_p \lesssim 2^{-\frac{n}{2}} c_n \tag{E.28}$$

Indeed, notice first

$$\begin{aligned} f_n &= -2 \int_{2^{n-1}}^{2^n} \Delta H_{2t} f dt \\ &= -2H_{2^{n-1}} \int_{2^{n-1}}^{2^n} H_{t-2^{n-1}} \Delta H_t f dt \\ &:= H_{2^{n-1}} g_n. \end{aligned}$$

Proposition E.2.7 implies then

$$\begin{aligned} \|X_i f_n\|_p &\lesssim 2^{-\frac{n}{2}} \|g_n\|_p \\ &\lesssim 2^{-\frac{n}{2}} \int_{2^{n-1}}^{2^n} \left\| H_{t-2^{n-1}} \frac{\partial H_t f}{\partial t} \right\|_p dt \\ &\lesssim 2^{-\frac{n}{2}} \int_{2^{n-1}}^{2^n} \left\| \frac{\partial H_t f}{\partial t} \right\|_p dt \\ &= 2^{-\frac{n}{2}} c_n. \end{aligned}$$

If $\varphi : [0, 1] \to G$ is an admissible path linking e to y with $l(\varphi) \leq 2|y|$,

$$\begin{aligned} \nabla_y f_n(x) &= \int_0^1 \frac{d}{ds} f_n(x\varphi(s)) ds \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^k c_i(s) X_i f_n(x\varphi(s)) ds. \end{aligned}$$

Hence, (E.28) implies

$$\begin{aligned} \|\nabla_y f_n\|_p &\leq \int_0^1 \sum_{i=1}^k |c_i(s)| \|X_i f_n(.\varphi(s))\|_p ds \\ &= \|X_i f_n\|_p \int_0^1 \sum_{i=1}^k |c_i(s)| ds \\ &\lesssim 2^{-\frac{n}{2}} c_n \int_0^1 \sum_{i=1}^k |c_i(s)| ds \\ &\lesssim |y| 2^{-\frac{n}{2}} c_n \end{aligned}$$

where the second line is a consequence of the right-invariance of the measure and the last one follows from the definition of $l(\varphi)$. Thus, one has

$$\|\nabla_y f_n\|_p \lesssim \begin{cases} |y| 2^{-\frac{n}{2}} c_n & \text{if } |y|^2 < 2^n \\ c_{n+1} & \text{if } |y|^2 \geq 2^n \end{cases} \tag{E.29}$$

3. **Estimate of $L_\alpha^{p,q}(f - H_1 f)$**

As a consequence of (E.29),

$$\begin{aligned}
[L_\alpha^{p,q}(f-H_1f)]^q &= \sum_{j=-\infty}^{-1}\int_{2^j<|y|^2\le 2^{j+1}}\left(\frac{\|\nabla_y f\|_p}{|y|^\alpha}\right)^q\frac{dy}{V(|y|)}\\
&\lesssim \sum_{j=-\infty}^{-1}\int_{2^j<|y|^2\le 2^{j+1}}\left(\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{\|\nabla_y f_n\|_p}{|y|^\alpha}\right)^q\frac{dy}{V(|y|)}\\
&\lesssim \sum_{j=-\infty}^{-1}2^{-\frac{j\alpha}{2}q}\left(\sum_{n=-\infty}^{j}c_{n+1}+\sum_{n=j+1}^{-1}2^{\frac{j-n}{2}}c_n\right)^q\\
&\lesssim \sum_{j=-\infty}^{-1}2^{jq(1-\frac{\alpha}{2})}\left(\sum_{n=-\infty}^{-1}2^{-\frac{\max\{j,n\}}{2}}[c_{n+1}+c_n]\right)^q\\
&\lesssim \sum_{n=-\infty}^{-1}\left(2^{-\frac{n\alpha}{2}}[c_{n+1}+c_n]\right)^q\\
&\lesssim \sum_{n=-\infty}^{0}\left(2^{-\frac{n\alpha}{2}}c_n\right)^q
\end{aligned}$$

Note that the third line holds since $2^j\le 1$, so that $V(2^{j+1})\lesssim V(2^j)$ and the fifth one is obtained with Lemma E.2.2, since $\alpha\in(0,1)$.
However

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{0}\left[2^{-n\frac{\alpha}{2}}c_n\right]^q &= \sum_{n=-\infty}^{0}\left[2^{-n\frac{\alpha}{2}}\int_{2^{n-1}}^{2^n}\left\|\frac{\partial H_tf}{\partial t}\right\|_p dt\right]^q\\
&\lesssim \sum_{n=-\infty}^{0}2^{-nq\frac{\alpha}{2}}2^{n(q-1)}\int_{2^{n-1}}^{2^n}\left\|\frac{\partial H_tf}{\partial t}\right\|_p^q dt\\
&\lesssim \sum_{n=-\infty}^{0}\int_{2^{n-1}}^{2^n}\left(t^{1-\frac{\alpha}{2}}\left\|\frac{\partial H_tf}{\partial t}\right\|_p\right)^q\frac{dt}{t}\\
&= \int_0^1\left(t^{1-\frac{\alpha}{2}}\left\|\frac{\partial H_tf}{\partial t}\right\|_p\right)^q\frac{dt}{t}\\
&= (\Lambda_\alpha^{p,q}(f))^q\,.
\end{aligned} \tag{E.30}$$

4. **Estimate of $L_\alpha^{p,q}(H_1f)$**
   With computations similar to those of the second step of this proof, we find that

$$\|\nabla_y H_1 f\|_p\lesssim |y|\|f\|_p.$$

   Consequently,

$$\begin{aligned}
L_\alpha^{p,q}(H_1f) &\le \|f\|_p\left(\int_{|y|\le 1}|y|^{q(1-\alpha)}\frac{dy}{V(|y|)}\right)^{\frac1q}\\
&\le \|f\|_p\left(\sum_{j\le -1}\int_{2^j<|y|\le 2^{j+1}}|y|^{q(1-\alpha)}\frac{dy}{V(|y|)}\right)^{\frac1q}\\
&\lesssim \|f\|_p\left(\sum_{j\le -1}2^{qj(1-\alpha)}\right)^{\frac1q}\\
&\lesssim \|f\|_p
\end{aligned}$$

   where the third line is a consequence of the local doubling property.

$\square$

Theorem E.6.4. *Let G be a unimodular Lie group and $\alpha \in (0,1)$, then we have the following Leibniz rule.*

If $p_1, p_2, p_3, p_4, p, q \in [1, +\infty]$ are such that

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_4} = \frac{1}{p}$$

then for all $f \in B_\alpha^{p_1,q}(G) \cap L^{p_3}(G)$ and all $g \in B_\alpha^{p_4,q}(G) \cap L^{p_2}(G)$, one has

$$\|fg\|_{B_\alpha^{p,q}} \lesssim \|f\|_{B_\alpha^{p_1,q}} \|g\|_{L^{p_2}} + \|f\|_{L^{p_3}} \|g\|_{B_\alpha^{p_4,q}}.$$

Proof: Check that

$$\nabla_y (f \cdot g)(x) = g(xy) \cdot \nabla_y f(x) + f(x) \cdot \nabla_y g(x).$$

Thus, with Hölder inequality,

$$\begin{aligned}
\|fg\|_{B_\alpha^{p,q}} &\simeq \|f \cdot g\|_p + L_\alpha^{p,q}(f \cdot g) \\
&\lesssim \|f\|_{p_1} \|g\|_{p_2} + L_\alpha^{p_1,q}(f) \cdot \|g\|_{L^{p_2}} + \|f\|_{L^{p_3}} \cdot L_\alpha^{p_4,q}(g) \\
&\lesssim \|f\|_{B_\alpha^{p_1,q}} \|g\|_{p_2} + \|f\|_{L^{p_3}} \|g\|_{B_\alpha^{p_4,q}}.
\end{aligned}$$

$\square$

E.6.2 Characterization by induction - Theorem E.1.19

Proposition E.6.5. *Let $p, q \in [1, +\infty]$ and $\alpha > -1$. Let $m > \frac{\alpha}{2}$. One has for all $i \in [\![1, k]\!]$*

$$\Lambda_\alpha^{p,q}(X_i f) \lesssim \Lambda_{\alpha+1}^{p,q} f + \|f\|_p = \|f\|_{B_{\alpha+1}^{p,q}}.$$

Proof: The scheme of the proof is similar to Proposition E.4.6.

1. **Decomposition of f:**
   Let M be an integer with $M > \frac{\alpha+1}{2}$. We decompose f as in Lemma E.3.1:

   $$f = \frac{1}{(M-1)!} \int_0^1 (t\Delta)^M H_t f \frac{dt}{t} + \sum_{k=0}^{M-1} \frac{1}{k!} \Delta^k H_1 f$$

   and we introduce

   $$f_n = -\int_{2^n}^{2^{n+1}} (t\Delta)^M H_t f \frac{dt}{t}$$

   and

   $$c_n = \int_{2^{n-1}}^{2^n} t^M \left\|\Delta^M H_t f\right\|_p \frac{dt}{t}.$$

   Remark then that

   $$\|f_n\|_p \leq c_{n+1}$$

   and

   $$f = \frac{1}{(M-1)!} \sum_{n=-\infty}^{-1} f_n + \sum_{k=0}^{M-1} \frac{1}{k!} \Delta^k H_1 f.$$

2. **A first estimate of $\Delta^m H_t X_i f_n$:**
   Let us prove that if $n \leq -1$, one has for all $i \in [\![1, k]\!]$

   $$\|\Delta^m X_i f_n\|_p \lesssim 2^{-n(m+\frac{1}{2})} c_n. \tag{E.31}$$

   Indeed, notice first

   $$\begin{aligned}
   f_n &= -2^M \int_{2^{n-1}}^{2^n} (t\Delta)^M H_{2t} f \frac{dt}{t} \\
   &= -2^M H_{2^{n-1}} \int_{2^{n-1}}^{2^n} H_{t-2^{n-1}} (t\Delta)^M H_t f \frac{dt}{t} \\
   &:= H_{2^{n-1}} g_n.
   \end{aligned}$$

Thus, since $\Delta = -\sum_{i=1}^k X_i^2$ can be written as a polynomial in the X_i's, we obtain with the upper estimate of the heat kernel (Proposition E.2.5),

$$\begin{aligned}\|\Delta^m X_i f_n\|_p &\lesssim \left(\int_G \left|\int_G |\Delta^M X_i h_{2^{n-1}}(z^{-1}x)| g_n(z)dz\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\lesssim \frac{2^{-n(m+\frac{1}{2})}}{V(2^{\frac{n}{2}})} \left(\int_G \left|\int_G \exp\left(-c\frac{|z^{-1}x|^2}{2^n}\right) g_n(z)dz\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\lesssim 2^{-n(m+\frac{1}{2})}\|g_n\|_p \\ &\lesssim 2^{-n(m+\frac{1}{2})}c_n\end{aligned}$$

where the second line is due to the fact that $V(2^{\frac{n}{2}}) \lesssim V(2^{\frac{n-1}{2}})$ and the last two lines are obtained by an argument analogous to the one for (E.28).

$$\begin{array}{rcl}\|\Delta^m H_t X_i f_n\|_p & \lesssim & \frac{1}{t^m}\|X_i f_n\|_p \\ & \lesssim & \frac{1}{t^m}\|X_i H_{2^{n-1}} g_n\|_p\end{array}$$

As a consequence, one has for all $t \in (0,1]$,

$$\|\Delta^m H_t X_i f_n\|_p = \|H_t \Delta^m X_i f_n\|_p \lesssim 2^{-n(m+\frac{1}{2})}c_n,$$

since H_t is uniformly bounded.

3. **A second estimate of $\Delta^m H_t X_i f_n$:**
Let us prove that for all $f \in L^p(G)$ and for all $i \in [\![1,k]\!]$, one has

$$\|\Delta^m H_t X_i f\|_p \lesssim t^{-m-\frac{1}{2}}\|f\|_p. \tag{E.32}$$

First, notice that

$$\begin{aligned}\Delta^m H_t X_i f(x) &= \int_G \frac{\partial^m}{\partial t^m} h_t(y)(X_i f)(xy)dy \\ &= \int_G \frac{\partial^m}{\partial t^m} h_t(y)[X_i f(x.)](y)dy \\ &= -\int_G X_i \frac{\partial^m}{\partial t^m} h_t(y) f(xy)dy \\ &= -\int_G X_i \Delta^m h_t(x^{-1}y) f(y)dy.\end{aligned}$$

Then, using the estimates on the heat kernel (Proposition E.2.5)and the fact that $\Delta = -\sum X_i^2$, we obtain

$$\begin{aligned}\|\Delta^m H_t X_i f\|_p &\lesssim \left(\int_G \left|\frac{t^{-m-\frac{1}{2}}}{V(\sqrt{t})}\int_G \exp\left(-c\frac{|x^{-1}y|^2}{t}\right)|f(y)|dy\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &:= t^{-m-\frac{1}{2}}\left(\int_G \left|\int_G K(x,y)|f(y)|dy\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

with $K(x,y) = \frac{1}{V(\sqrt{t})}\exp\left(-c\frac{|x^{-1}y|^2}{t}\right)$. Proposition E.2.3 yields the estimate (E.32).

4. **Estimate of $\Lambda_\alpha^{p,q}(\sum f_n)$**
The two previous steps imply

$$\|\Delta^m H_t X_i f_n\|_p \lesssim \begin{cases} 2^{-n(m+\frac{1}{2})}c_n & \text{if } t < 2^n \\ t^{-m-\frac{1}{2}}c_{n+1} & \text{if } t \geq 2^n \end{cases}.$$

As a consequence,

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \left(t^{m-\frac{\alpha}{2}} \left\| \Delta^m H_t X_i \sum_{n=-\infty}^{-1} f_n \right\|_p \right)^q \frac{dt}{t} \\
&\quad \lesssim \sum_{j=-\infty}^{-1} \int_{2^j < t \leq 2^{j+1}} \left(t^{m-\frac{\alpha}{2}} \sum_{n=-\infty}^{-1} \|\Delta^m H_t X_i f_n\|_p \right)^q \frac{dt}{t} \\
&\quad \lesssim \sum_{j=-\infty}^{-1} \left(2^{j(m-\frac{\alpha}{2})} \sum_{n=-\infty}^{j} 2^{-j(m+\frac{1}{2})} c_{n+1} + \sum_{n=j+1}^{-1} 2^{-n(m+\frac{1}{2})} c_n \right)^q \\
&\quad \lesssim \sum_{j=-\infty}^{-1} \left(2^{j(m-\frac{\alpha}{2})} \sum_{n=-\infty}^{-1} 2^{-\max\{j,n\}(m+\frac{1}{2})} [c_n + c_{n+1}] \right)^q \\
&\quad \lesssim \sum_{n=-\infty}^{-1} \left[2^{-n\frac{\alpha+1}{2}} [c_n + c_{n+1}] \right]^q \\
&\quad \lesssim \sum_{n=-\infty}^{0} \left[2^{-n\frac{\alpha+1}{2}} c_n \right]^q
\end{aligned}$$

where we used Lemma E.2.2 for the fourth estimate, relevant since $-1 < \frac{\alpha}{2} < m$ by assumption. We get then the domination

$$\int_0^1 \left(t^{m-\frac{\alpha}{2}} \left\| \Delta^m H_t X_i \sum_n f_n \right\|_p \right)^q \frac{dt}{t} \lesssim \sum_{n=-\infty}^{0} \left[2^{-n\frac{\alpha+1}{2}} c_n \right]^q. \tag{E.33}$$

However computations analogous to those leading to (E.30) prove that

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{0} \left[2^{-n\frac{\alpha+1}{2}} c_n \right]^q &\lesssim \int_0^1 \left(t^{M-\frac{\alpha+1}{2}} \left\| \Delta^M f \right\|_p \right)^q \frac{dt}{t} \\
&\lesssim \left(\Lambda_{\alpha+1}^{p,q} f \right)^q.
\end{aligned} \tag{E.34}$$

5. **Estimate of the remaining term.**
   Recall that

$$f = \frac{1}{(M-1)!} \sum_{n=-\infty}^{-1} f_n + \sum_{k=0}^{M-1} \frac{1}{k!} \Delta^k H_1 f.$$

We already estimated $\Lambda_\alpha^{p,q}(\sum f_n)$. What remains to be estimated is $\Lambda_\alpha^{p,q}(\sum \frac{1}{k!} \Delta^k H_1 X_i f)$. Proposition E.2.7 provides as well

$$\left\| \Delta^m H_t X_i \Delta^k H_1 f \right\|_p \leq \left\| \Delta^m X_i \Delta^k H_1 f \right\|_p \lesssim \|f\|_p.$$

As a consequence, we get,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left(t^{m-\frac{\alpha}{2}} \left\| \Delta^m H_t X_i \sum_{k=0}^{M-1} \frac{1}{k!} \Delta^k H_1 f \right\|_p \right)^q \frac{dt}{t} &\lesssim \left(\|f\|_p \int_0^1 t^{q(m-\frac{\alpha}{2})} \frac{dt}{t} \right)^q \\
&\lesssim \|f\|_p^q.
\end{aligned}$$

□

Corollary E.6.6. *Let $p, q \in [1, +\infty]$ and $\alpha > 0$.*

$$\|f\|_{B_{\alpha+1}^{p,q}} \simeq \|f\|_{L^p} + \sum_{i=1}^{k} \|X_i f\|_{B_\alpha^{p,q}}.$$

Proof: The main work was done in the previous proposition. Indeed, notice that Proposition E.6.5 implies

$$\begin{aligned}\Lambda^{p,q}_{\alpha+1} f &= \Lambda^{p,q}_{\alpha-1}(\Delta f) \\ &\leq \sum_{i=1}^{k} \Lambda^{p,q}_{\alpha-1} X_i(X_i f) \\ &\lesssim \sum_{i=1}^{k} \|X_i f\|_{B^{p,q}_{\alpha}},\end{aligned}$$

which provides the domination of the first term by the second one.

The converse inequality splits into two parts. The first one is the domination of $\Lambda^{p,q}_{\alpha}(X_i f)$ by $\|f\|_{B^{p,q}_{\alpha+1}}$, which is an immediate application of Proposition E.6.5. The second one is the domination of $\|X_i f\|_p$. But recall that Theorem E.1.9 states that we can replace $\|X_i f\|_p$ by $\|H_{\frac{1}{2}} X_i f\|_p$ in the Besov norm, and (E.32) provides that

$$\|H_{\frac{1}{2}} X_i f\|_p \lesssim \|f\|_p \leq \|f\|_{B^{p,q}_{\alpha}}.$$

$\square$

Bibliographie

[AC05] P. Auscher and T. Coulhon. Riesz transform on manifolds and Poincaré inequalities. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)*, 4(3) :531–555, 2005.

[ACDH04] P. Auscher, T. Coulhon, X. T. Duong, and S. Hofmann. Riesz transform on manifolds and heat kernel regularity. *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, 37(6) :911–957, 2004.

[AHL+02] P. Auscher, S. Hofmann, M. Lacey, A. McIntosh, and Ph. Tchamitchian. The solution of the Kato square root problem for second order elliptic operators on $\mathbb{R}^n$. *Ann. of Math. (2)*, 156(2) :633–654, 2002.

[ALM14] C. Arhancet and C. Le Merdy. Dilation of Ritt operators on L^p-spaces. *Israel J. of Math.*, 201(1) :373–414, 2014.

[AMM] P. Auscher, A. McIntosh, and A. J. Morris. Calderòn reproducing formulas and applications to Hardy spaces. Available as http ://arxiv.org/abs/1304.0168.

[AMR08] P. Auscher, A. McIntosh, and E. Russ. Hardy spaces of differential forms and Riesz transforms on Riemannian manifolds. *J. Geom. Anal.*, 18(1) :192–248, 2008.

[Aus07] P. Auscher. On necessary and sufficient conditions for L^p-estimates of Riesz transforms associated to elliptic operators on $\mathbb{R}^n$ and related estimates. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 186(871) :75 pp, 2007.

[BB92] M. T. Barlow and R. F. Bass. Transition densities for Brownian motion on the Sierpiński carpet. *Probab. Theory Related Fields*, 91(3-4) :307–330, 1992.

[BB99] M. T. Barlow and R. F. Bass. Random walks on graphical Sierpinski carpets. In *Random walks and discrete potential theory (Cortona, 1997)*, Sympos. Math., XXXIX, pages 26–55. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.

[BB15] I. Bailleul and F. Bernicot. Heat semigroup and singular pdes. *arXiv preprint arXiv :1501.06822*, 2015.

[BBR12] N. Badr, F. Bernicot, and E. Russ. Algebra properties for Sobolev spaces - Applications to semilinear PDE's on manifolds. *J. Anal. Math.*, 118(2) :509–544, 2012.

[BCD11] H. Bahouri, J.-Y. Chemin, and R. Danchin. *Fourier analysis and nonlinear partial differential equations*, volume 343 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer, Heidelberg, 2011.

[BCF14] F. Bernicot, T. Coulhon, and D. Frey. Gaussian heat kernel bounds through elliptic moser iteration. *Available at http ://arxiv.org/pdf/1407.3906.pdf*, 2014.

[BCF15] F. Bernicot, T. Coulhon, and D. Frey. Sobolev algebras through heat kernel estimates. *Available at http ://arxiv.org/pdf/1505.01442v1.pdf*, 2015.

[BD14] T. A. Bui and X. T. Duong. Hardy spaces associated to the discrete Laplacian on graphs and boundedness of singular integrals. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 255 :1761–1796, 2014.

[BDY12] H.-Q. Bui, X. T. Duong, and L. Yan. Calderón reproducing formulas and new Besov spaces associated with operators. *Adv. Math.*, 229(4) :2449–2502, 2012.

[Ber12] F. Bernicot. A T(1)-theorem in relation to a semigroup of operators and applications to new paraproducts. *Trans ; Amer. Math ; Soc.*, 364 :6071–6108, 2012.

[BF15] F. Bernicot and D. Frey. Riesz transforms through reverse Hölder and Poincaré inequalities. *Available at http ://arxiv.org/pdf/1503.02508v1.pdf*, 2015.

[BK03] S. Blunck and P. C. Kunstmann. Calderón-Zygmund theory for non-integral operators and the H^∞ functional calculus. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 19(3) :919–942, 2003.

[BL76] J. Bergh and J. Löfström. *Interpolation spaces. An introduction.* Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, No. 223.

[BM12] N. Badr and J. M. Martell. Weighted norm inequalities on graphs. *J. Geom. Anal.*, 22(4) :1173–1210, 2012.

[BMN10] A Bényi, D. Maldonado, and V. Naibo. What is... a paraproduct. *Notices of the AMS*, 7 :858–860, 2010.

[Bon81] J.-M. Bony. Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 14(2) :209–246, 1981.

[BR09] N. Badr and E. Russ. Interpolation of Sobolev spaces, Littlewood-Paley inequalities and Riesz transforms on graphs. *Publ. Mat.*, 53 :273–328, 2009.

[BZ08] F. Bernicot and J. Zhao. New abstract Hardy spaces. *J. Funct. Anal.*, 255 :1761–1796, 2008.

[CD99] T. Coulhon and X. T. Duong. Riesz transforms for $1 \leq p \leq 2$. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 351(3) :1151–1169, 1999.

[CD03] T. Coulhon and X. T. Duong. Riesz transform and related inequalities on noncompact Riemannian manifolds. *Comm. Pure Appl. Math.*, 56(12) :1728–1751, 2003.

[CDL03] T. Coulhon, X. T. Duong, and X. D. Li. Littlewood-Paley-Stein functions on complete Riemannian manifolds for $1 \leq p \leq 2$. *Studia Math.*, 154(1) :37–57, 2003.

[CDMY96] M.G. Cowling, I. Doust, A. McIntosh, and A. Yagi. Banach space operators with a bounded H^∞ functional calculus. *J. Austrl. Math. Soc.*, 60 :51–89, 1996.

[CG98] T. Coulhon and A. Grigor'yan. Random walks on graphs with regular volume growth. *Geom. Funct. Anal.*, 8(4) :656–701, 1998.

[CGZ05] T. Coulhon, A. Grigor'yan, and F. Zucca. The discrete integral maximum principle and its applications. *Tohoku Math. J.*, 57 :559–587, 2005.

[Che14] L. Chen. *Quasi Riesz transforms, Hardy spaces and generalized sub-Gaussian heat kernel estimates.* PhD thesis, Université Paris Sud - Paris XI ; Australian national university, 2014. https ://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01001868.

[Chr95] M. Christ. Temporal regularity for random walk on discrete nilpotent groups. In *Proceedings of the Conference in Honor of Jean-Pierre Kahane (Orsay, 1993)*, number Special Issue, pages 141–151, 1995.

[CL04] T. Coulhon and H.-Q. Li. Estimations inférieures du noyau de la chaleur sur les variétés coniques et transformée de riesz. *Arch. der Math.*, 83(3) :229–242, 2004.

[CMS83] R. R. Coifman, Y. Meyer, and E. M. Stein. Un nouvel éspace fonctionnel adapté à l'étude des opérateurs définis par des intégrales singulières. In *Harmonic analysis (Cortona, 1982)*, volume 992 of *Lecture Notes in Math.*, pages 1–15. Springer, Berlin, 1983.

[CMS85] R. R. Coifman, Y. Meyer, and E. M. Stein. Some new function spaces and their applications to harmonic analysis. *J. Funct. Analysis*, 62 :304–335, 1985.

[Coi74] R. R. Coifman. A real variable characterization of H^p. *Studia Math.*, 51 :269–274, 1974.

[CRTN01] T. Coulhon, E. Russ, and V. Tadivel-Nachef. Sobolev algebras on Lie groups and Riemannian manifolds. *Amer. J. of Math.*, 123 :283–342, 2001.

[CRW78] R. R. Coifman, R. Rochberg, and G. Weiss. Applications of transference : the L^p version of von Neumann's inequality and the Littlewood-Paley-Stein theory. In *Linear spaces and approximation (Proc. Conf., Math. Res. Inst., Oberwolfach, 1977)*, pages 53–67. Internat. Ser. Numer. Math., Vol. 40. Birkhäuser, Basel, 1978.

[CSC90] T. Coulhon and L. Saloff-Coste. Puissances d'un opérateur régularisant. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 26(3) :419–436, 1990.

[CW77] R. R. Coifman and G. Weiss. Extensions of Hardy spaces and their use in analysis. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 83(4) :569–645, 1977.

[Dan12] R. Danchin. A survey on Fourier analysis methods for solving the compressible Navier-Stokes equations. *Sci. China Math.*, 55(2) :245–275, 2012.

[Del99] T. Delmotte. Parabolic Harnack inequality and estimates of Markov chains on graphs. *Revista Matemàtica Iberoamericana*, 15(1) :181–232, 1999.

[DHY06] D. Deng, Y. Han, and D. Yang. Besov spaces with non-doubling measures. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 358(7) :2965–3001, 2006.

[DMI99] X. T. Duong and A. Mc Intosh. Singular integral operators with non-smooth kernels on irregular domains. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 15(2) :233–265, 1999.

[Dun06] N. Dungey. A note on time regularity for discrete time heat kernels. *Semigroups forum*, 72(3) :404–410, 2006.

[Dun08] N. Dungey. A Littlewood-Paley-Stein estimate on graphs and groups. *Studia Mathematica*, 189(2) :113–129, 2008.

[DY05a] X.T. Duong and L. X. Yan. Duality of Hardy and BMO spaces associated with operators with heat kernel bounds. *J. Amer. Math. Soc.*, 18(4) :943–973, 2005.

[DY05b] X.T. Duong and L. X. Yan. New function spaces of BMO type, the John-Niremberg inequality, interpolation, and applications. *Comm. Pure Appl. Math.*, 58(10) :1375–1420, 2005.

[Fen14] J. Feneuil. Hardy and BMO spaces on graphs, application to Riesz transform. *arXiv preprint arXiv :1411.3352*, 2014.

[Fen15a] J. Feneuil. Algebra properties for Besov spaces on unimodular Lie groups. *En préparation*, 2015.

[Fen15b] J. Feneuil. Littlewood-Paley functionals on graphs. *Math. Nachr.*, 2015. Available as http ://fr.arxiv.org/abs/ 1404.1353 and http ://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/mana.201400119/abstract.

[Fen15c] J. Feneuil. L^p-boundedness of Riesz transforms under subgaussian estimates ($1 < p < 2$). *En préparation*, 2015.

[FM12] H. Führ and A. Mayeli. Homogeneous Besov spaces on stratified Lie groups and their wavelet characterization. *J. Funct. Spaces Appl.*, pages Art. ID 523586, 41, 2012.

[FMV06] G. Furioli, C. Melzi, and A. Veneruso. Littlewood-Paley decompositions and Besov spaces on Lie groups of polynomial growth. *Math. Nachr.*, 279(9-10) :1028–1040, 2006.

[Fre11] D. Frey. *Paraproducts via H^∞-functional calculus and a $T(1)$-Theorem for non-integral operators.* PhD thesis, Karlsruher Inst. für Technologie, Diss., 2011. http ://digbib.ubka.uni-karlsruhe.de/volltexte/1000022796.

[Fre14] D. Frey. Sobolev algebras through semigroups methods. *"Functional calculus and Harmonic analysis of semigroups" workshop* . 2014. Available as `https://trimestres-lmb.univ-fcomte.fr/IMG/pdf/bes14-frey.pdf`.

[FS71] C. Fefferman and E. M. Stein. Some maximal inequalities. *Amer. J. Math.*, 93 :107–115, 1971.

[FS72] C. Fefferman and E. M. Stein. H^p spaces of several variables. *Acta Math.*, 129(3-4) :137–193, 1972.

[GLre] A. Grigor'yan and L. Liu. Heat kernel and lipschitz-besov spaces. *Forum Math.*, à paraître.

[Gri84] R. I. Grigorchuk. Degrees of growth of finitely generated groups and the theory of invariant means. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 48(5) :939–985, 1984.

[Gri01] A. Grigor'yan. Heat kernels on manifolds, graphs and fractals. In *European Congress of Mathematics, Vol. I (Barcelona, 2000)*, volume 201 of *Progr. Math.*, pages 393–406. Birkhäuser, Basel, 2001.

[Gri09] A. Grigor'yan. Analysis on graphs. *Lecture Notes, University Bielefeld*, 2009.

[GS12] I. Gallagher and Y. Sire. Besov algebras on Lie groups of polynomial growth. *Studia Math.*, 212(2) :119–139, 2012.

[GT01] A. Grigor'yan and A. Telcs. Sub-Gaussian estimates of heat kernels on infinite graphs. *Duke Math. J.*, 109(3) :451–510, 2001.

[Gui73] Y. Guivarc'h. Croissance polynomiale et périodes des fonctions harmoniques. *Bull. Soc. Math. France*, 101 :333–379, 1973.

[HK95] P. Hajłasz and P. Koskela. Sobolev meets Poincaré. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 320(10) :1211–1215, 1995.

[HK00] P. Hajlasz and P. Koskela. Sobolev met Poincaré. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 145(688), 2000.

[HKST15] J. Heinonen, P. Koskela, N. Shanmugalingam, and J. T. Tyson. *Sobolev Spaces on Metric Measure Spaces.* Cambridge University Press, 2015.

[HLM⁺11] S. Hofmann, G. Lu, D. Mitrea, M. Mitrea, and L. Yan. Hardy spaces associated to non-negative self-adjoint operators satisfying Davies-Gaffney estimates. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 214(1007) :vi+78, 2011.

[HM03] S. Hofmann and J. M. Martell. L^p bounds for Riesz transforms and square roots associated to second order elliptic operators. *Publ. Mat.*, 47(2) :497–515, 2003.

[HM09] S. Hofmann and S. Mayboroda. Hardy and BMO spaces associated to divergence form elliptic operators. *Math. Ann.*, 344 :37–116, 2009.

[HMM11] S. Hofmann, S. Mayboroda, and A. McIntosh. Second order elliptic operators with complex bounded measurable coefficients in L^p, Sobolev and Hardy spaces. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 44(5) :723–800, 2011.

[HSC93] W. Hebisch and L. Saloff-Coste. Estimates for Markov chains and random walks on groups. *The Annals of Probability*, 21(2) :673–709, 1993.

[Jon96] O. D. Jones. Transition probabilities for the simple random walk on the Sierpiński graph. *Stochastic Process. Appl.*, 61(1) :45–69, 1996.

[KU12] P. C. Kunstmann and M. Ulh. Spectral multiplier theorems of Hörmander type on Hardy and Legesgue spaces. 2012. Avaiable as http ://arxiv.org/pdf/1209.0358v1.pdf.

[KZ08] S. Keith and X. Zhong. The Poincaré inequality is an open ended condition. *Ann. of Math. (2)*, 167(2) :575–599, 2008.

[Lat78] R. H. Latter. A characterization of $H^p(\mathbf{R}^n)$ in terms of atoms. *Studia Math.*, 62(1) :93–101, 1978.

[Li99] H.-Q. Li. La transformation de riesz sur les variétés coniques. *J. Funct. Anal.*, 168(1) :145–238, 1999.

[LMX12] C. Le Merdy and Q. Xu. Maximal theorems and square functions for analytic operators on L^p-spaces. *J. Lond. Math. Soc. (2)*, 86(2) :343–365, 2012.

[Med95] S. Meda. On the Littlewood-Paley-Stein g-function. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 347(6) :2201–2212, 1995.

[Mey90] Y. Meyer. *Ondelettes et opérateurs. II.* Actualités Mathématiques. [Current Mathematical Topics]. Hermann, Paris, 1990. Opérateurs de Calderón-Zygmund. [Calderón-Zygmund operators].

[MMMM13] D. Mitrea, I. Mitrea, M. Mitrea, and S. Monniaux. *Groupoid metrization theory.* Applied and Numerical Harmonic Analysis. Birkhäuser/Springer, New York, 2013. With applications to analysis on quasi-metric spaces and functional analysis.

[MRre] P. Mironescu and E. Russ. Traces of weighted sobolev spaces. old and new. *Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications*, à paraître.

[NSW85] A. Nagel, E. M. Stein, and S. Wainger. Balls and metrics defined by vector fields. I. Basic properties. *Acta Math.*, 155(1-2) :103–147, 1985.

[Pan93] M. M. H. Pang. Heat kernels of graphs. *J. London Math. Soc. (2)*, 47(1) :50–64, 1993.

[RS96] T. Runst and W. Sickel. *Sobolev spaces of fractional order, Nemytskij operators, and nonlinear partial differential equations*, volume 3 of *de Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications.* Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1996.

[Rud91] W. Rudin. *Functional Analysis.* International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill, Inc., New York, second edition, 1991.

[Run86] T. Runst. Mapping properties of non-linear operators in spaces of triebel-lizorkin and besov type. *Analysis Mathematica*, 12(4) :313–346, 1986.

[Rus00] E. Russ. Riesz tranforms on graphs for $1 \leq p \leq 2$. *Math. Scand.*, 87(1) :133–160, 2000.

[Rus01] E. Russ. H^1-L^1 boundedness of Riesz transforms on Riemannian manifolds and on graphs. *Potential Anal.*, 14(3) :301–330, 2001.

[Rus07] E. Russ. The atomic decomposition for tent spaces on spaces of homogeneous type. In *CMA/AMSI Research Symposium "Asymptotic Geometric Analysis, Harmonic Analysis, and Related Topics"*, volume 42 of *Proc. Centre Math. Appl. Austral. Nat. Univ.*, pages 125–135. Austral. Nat. Univ., Canberra, 2007.

[SC90] L. Saloff-Coste. Analyse sur les groupes de Lie à croissance polynômiale. *Ark. Mat.*, 28(2) :315–331, 1990.

[Sjö99] P. Sjögren. An estimate for a first-order Riesz operator on the affine group. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 351(8) :3301–3314, 1999.

[Skr02] L. Skrzypczak. Besov spaces and Hausdorff dimension for some Carnot-Carathéodory metric spaces. *Canad. J. Math.*, 54(6) :1280–1304, 2002.

[Ste61] E. M. Stein. On the Maximal Ergodic Theorem. *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 47 :1894–1897, 1961.

[Ste70a] E. M. Stein. *Singular integrals and differentiability properties of functions.* Princeton Mathematical Series, No. 30. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970.

[Ste70b] E. M. Stein. *Topics in harmonic analysis related to the Littlewood-Paley theory.* Ann. of Math. Studies. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1970.

[Ste93] E. M. Stein. *Harmonic analysis : real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals*, volume 43 of *Princeton Mathematical Series.* Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993. With the assistance of Timothy S. Murphy, Monographs in Harmonic Analysis, III.

[SV08] P. Sjögren and M. Vallarino. Boundedness from H^1 to L^1 of Riesz transforms on a Lie group of exponential growth. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 58(4) :1117–1151, 2008.

[SW60] E. M. Stein and G. Weiss. On the theory of harmonic functions of several variables. I. The theory of H^p-spaces. *Acta Math.*, 103 :25–62, 1960.

[Tri82] H. Triebel. Characterizations of Besov-Hardy-Sobolev spaces via harmonic functions, temperatures, and related means. *J. Approx. Theory*, 35(3) :275–297, 1982.

[Tri83] H. Triebel. *Theory of function spaces*, volume 78 of *Monographs in Mathematics.* Birkhäuser Verlag, Basel, 1983.

[Tri92] H. Triebel. *Theory of function spaces. II*, volume 84 of *Monographs in Mathematics.* Birkhäuser Verlag, Basel, 1992.

[Usp61] S.V. Uspenskiĭ. Imbedding theorems for classes with weights. *Trudy Mat. Inst. Steklov.*, 60 :282–303, 1961. English translation : *Am. Math. Soc. Transl.*, 87 :121–145, 1970.

[VSCC92] N. Th. Varopoulos, L. Saloff-Coste, and T. Coulhon. *Analysis and geometry on groups*, volume 100 of *Cambridge Tracts in Mathematics.* Cambridge University Press, Cambridge, 1992.